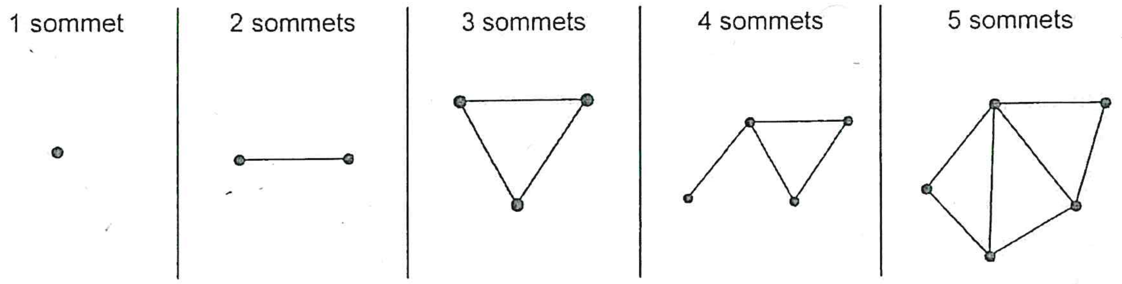
Olympiades nationales de mathématiques 2024

Sujet académique - corrigé

Exercice 1 : Un problème de croisements

1- Des graphes planaires à 1 sommet, à 2 sommets, à 3 sommets, à 4 sommets et à 5 sommets.



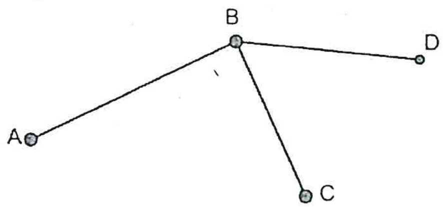
2- a- Vérifier que le graphe à un sommet vérifie la relation d'Euler.

Le graphe a 1 sommet, 0 arête et 1 région, et la relation $1-0+1=2$ est bien vérifiée.

b- Sur votre copie, faire une illustration de chacune de ces situations puis vérifier que chacun des graphes obtenus satisfait la relation d'Euler.

- Situation 1 : le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête.

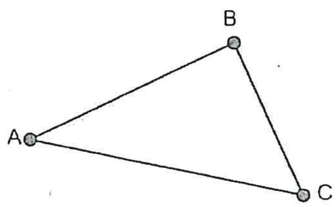
  Dans ce cas, $s + r - a = 4 + 1 - 3 = 2$, la relation d'Euler est vérifiée



- Situation 2 : le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ajoute une arête et une région.

  Dans ce cas, $s + r - a = 3 + 2 - 3 = 2$,

  la relation d'Euler est vérifiée



c- Conclure que la relation d'Euler est vraie pour tout graphe planaire.

Tout graphe planaire peut être obtenu en partant du graphe avec un seul sommet et aucune arête et en rajoutant des arêtes une par une, partant d'un sommet déjà existant et arrivant vers un sommet soit déjà existant, soit nouveau.

Deux cas de figure se présentent lorsqu'on rajoute une arête.

- Si le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête. En rajoutant cette arête et ce sommet, le nombre de régions reste inchangé (puisque la nouvelle arête ne coupe aucune face en deux). s devient $(s+1)$ et a devient $(a+1)$, la valeur de $s+r-a$ ne change pas.
- Si le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ne rajoute aucun sommet. En revanche, la nouvelle arête coupe toujours une région en deux. Dans ce cas, a devient $(a+1)$ et r devient $(r+1)$, ce qui laisse à nouveau la valeur de $s+r-a$ inchangée.

3- **Justifier que pour tout graphe planaire ayant 3 sommets ou plus, $r \leq \frac{2}{3} a$.**

Notons r le nombre de régions d'un graphe ($r \in \mathbb{N}^*$), alors $r = \sum_{i=1}^{r} r_i$ en numérotant de 1 à r les r régions du graphe (on a alors pour tout entier i entre 1 et r, $r_i = 1$).
Chaque région est délimitée par au moins 3 arêtes donc pour tout entier i entre 1 et p :

$$3r_i \leq a_i$$

où a_i est le nombre d'arêtes délimitant la i$^{\text{ème}}$ région.
Notons a le nombre total d'arêtes du graphe, chaque arête étant commune à deux régions, on a alors : $a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} a_i$

Ainsi : $r = \sum_{i=1}^{r} r_i \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{r} a_i = \frac{2}{3} a$

4- **En déduire que pour tout graphe planaire ayant plus de 3 sommets,**

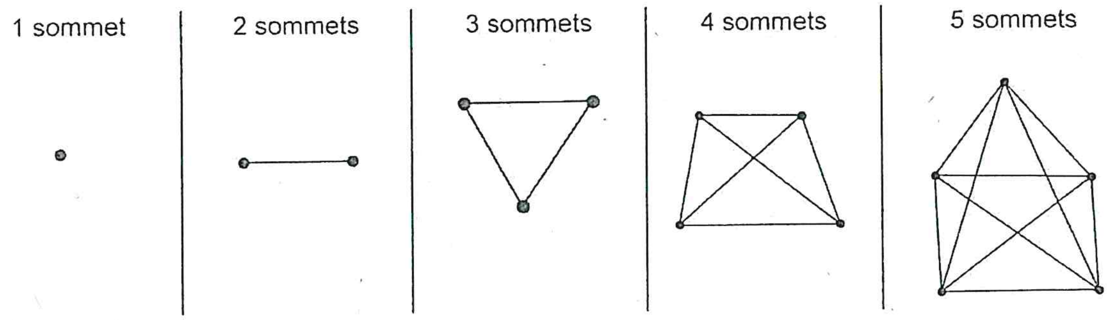
$$2 - s + \frac{a}{3} \leq 0 \quad (relation\ (2))$$

En injectant le résultat du 3- dans la formule d'Euler, on obtient :

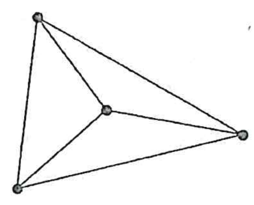
$2 = s + r - a \leq s - \frac{1}{3}a$ donc $2 - s + \frac{a}{3} \leq 0$

Partie 2 : Avec croisement de rail

5- a- **Tracer une représentation des graphes complets K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.**



b- **Déterminer $Cr(K_1), Cr(K_2), Cr(K_3)$ et $Cr(K_4)$.**



On peut affirmer que $Cr(K_1) = Cr(K_2) = Cr(K_3) = 0$

et aussi que $Cr(K_4) = 0$

6- a- **En utilisant la $relation$ (2), prouver que K_5 n'est pas un graphe planaire.**

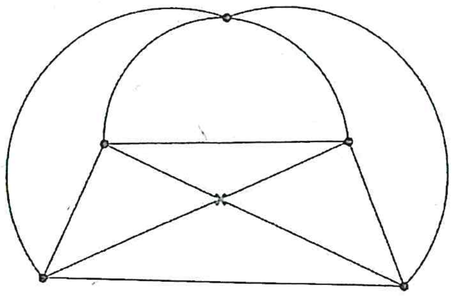
K_5 possède 5 sommets et 10 arêtes, $2 - s + \frac{a}{3} = -3 + \frac{10}{3} > 0$

Si un graphe est planaire, il vérifie la *relation (2)*.

Par contraposée, on déduit que K_5 n'est pas planaire.

b- Déterminer $Cr(K_5)$ (vous pourrez vous aider d'une représentation de K_5).

Voici une représentation de K_5 avec un croisement donc $Cr(K_5) \leq 1$



Les croisements sont marqués par une croix rouge et les sommets par un rond bleu

D'après a- comme K_5 n'est pas planaire, $Cr(K_5) \geq 1$

Par double inégalité, on en déduit que $Cr(K_5) = 1$.

5- Considérons le graphe K_n, $n \in \mathbb{N}^*$

a- Déterminer en justifiant le nombre d'arêtes de ce graphe.

Chacun des n sommets du graphe est relié aux $(n-1)$ autres et chaque arête relie deux sommets donc le graphe complet d'ordre n compte $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

b- Quel est le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G_n ?

Les sommets de G_n sont les sommets de K_n auxquels on ajoute le nombre de croisements : il y en a donc $n + cr(K_n)$

Le nombre d'arêtes de G_n est $\frac{n(n-1)}{2} + 2Cr(K_n)$

c- Appliquer la *relation* (2) à G_n et justifier que $Cr(K_n) \geq \frac{n^2-7n+12}{2}$

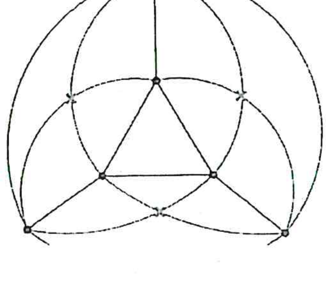
G_n est un graphe planaire, on peut lui appliquer la *relation (2)* :

$$2 - n - Cr(K_n) + \frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{3}Cr(K_n) \leq 0 \Leftrightarrow 2 - n + \frac{1}{6}n(n-1) \leq \frac{1}{3}Cr(K_n)$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq Cr(K_n)$$

Et donc $Cr(K_n) \geq \frac{n^2-7n+12}{2}$

d- Déterminer $Cr(K_6)$ et tracer une représentation de K_6 avec $Cr(K_6)$ croisements.



On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_6) \geq \frac{36 - 42 + 12}{2} = 3$$

Or $Cr(K_6) \leq 3$ d'après la représentation graphique ci-contre

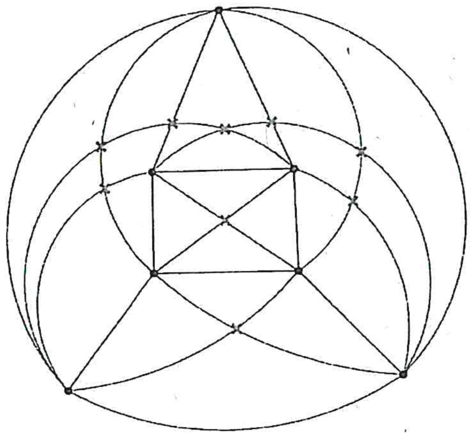
Par double inégalité, $Cr(K_6) = 3$

e- Pouvez-vous déterminer avec certitude $Cr(K_7)$? Tracer une représentation de K_7 qui permet d'approcher au mieux $Cr(K_7)$.

On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_7) \geq \frac{49 - 49 + 12}{2} = 6$$

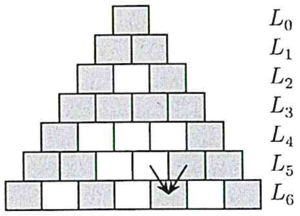
Par représentation du graphe, je trouve au mieux $Cr(K_7) \leq 9$ et je ne peux donc rien affirmer avec certitude



Pyramide de cellules grises

On considère une pyramide infinie construite en superposant des cellules en quinconce selon les règles suivantes :

- La ligne du haut possède une seule cellule grise.
- Chaque ligne suivante possède une cellule de plus que celle située juste au dessus.
- Les cellules aux extrémités des lignes sont grises.
- Une cellule surplombée par deux cellules de même couleur est blanche ; sinon elle est grise.



La première ligne est notée L_0, la seconde L_1 et ainsi de suite. On numérote aussi les cellules de gauche à droite dans une ligne : $L_n[0]$ est la couleur de la première cellule, suivie de $L_n[1]$ jusqu'à $L_n[n]$.

Exemples : $L_0[0]$ = gris (la cellule au sommet est grise). $L_6[4]$ = gris car $L_5[3] \neq L_5[4]$; une interprétation de ce résultat est représentée dans la pyramide ci-dessus par deux flèches qui vont de la ligne L_5 à la ligne L_6.

§1. Premiers exemples

Question 1. *a*) Sans justifier, compléter jusqu'à la ligne L_{10} la pyramide de l'annexe 1 avec les couleurs suivant les règles précédentes.

b) Donner la valeur de $L_9[4]$. Justifier en entourant la cellule correspondante dans l'annexe 1.

Question 2. Les trois premières lignes entièrement grises de la pyramide sont L_0, L_1 et L_3. Déterminer le plus petit entier $n \geqslant 5$ tel que L_n soit entièrement grise. Aucune justification n'est attendue.

Question 3. Dans la fonction ci-contre, L est la liste des couleurs d'une ligne L_n, en représentant le blanc par 0 et le gris par 1.
La deuxième ligne de l'algorithme calcule n à partir du nombre `len(L)` de cellules dans la liste, tandis que la troisième ligne prépare une liste S avec un emplacement de plus pour représenter L_{n+1}.
Enfin, la quatrième ligne remplit `S[0]` et `S[n+1]` avec le nombre 1 puisque les extrémités de L_{n+1} sont grises.
Sur l'annexe 2, compléter l'algorithme pour que la fonction renvoie la liste S des couleurs de la ligne L_{n+1}.

```
1  def suivante(L):
2      n = len(L) - 1
3      S = [None] * (n+2)
4      S[0] = S[n+1] = 1
5      for k in range(n):
6          if L[...] == L[...]:
7              S[...] = ...
8          else:
9              ...
10     return ...
```

§2. Couleur et parité

Question 4. On obtient L_6 en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_3. On obtient L_5 en dédoublant chaque cellule de L_2.
Ces constructions se retrouvent ailleurs dans la pyramide. Donner deux exemples de chaque cas.

Question 5. Soit n un entier quelconque tel que $n \geqslant 1$. On peut représenter $L_n = \boxed{c_0}\boxed{c_1}\boxed{c_2}\cdots\boxed{c_{n-1}}\boxed{c_n}$ où c_k est la couleur de la cellule correspondante : $c_k = L_n[k]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
Dans cette question on suppose que L_{2n} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_n.

a) Représenter L_{2n} et L_{2n+1} avec les bonnes informations de couleur.

b) Démontrer que L_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

c) Démontrer que L_{2n+2} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_{n+1}.

Question 6. Démontrer que pour tout entier naturel n, la ligne L_{2n} s'obtient en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_n et que la ligne L_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

On a ainsi démontré que pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$L_{2n}[2k] = L_n[k] \qquad L_{2n}[2k+1] = \text{blanc}$$
$$L_{2n+1}[2k] = L_n[k] \quad L_{2n+1}[2k+1] = L_n[k]$$

§3. Écriture binaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique décomposition $n = n_a \times 2^a + n_{a-1} \times 2^{a-1} + \cdots + n_3 \times 2^3 + n_2 \times 2^2 + n_1 \times 2^1 + n_0$ avec $n_i \in \{0\,;1\}$ pour tout i. On l'appelle **écriture binaire** de n et on la note $(n_a n_{a-1} \ldots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$.
Par exemple, $5 = (101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $32 = (100000)_2 = 2^5$ et $31 = (11111)_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

Question 7. *a*) Donner les écritures binaires des entiers de 0 à 6 inclus.
b) Donner l'écriture décimale (habituelle) des entiers $(10101)_2$ et $(1010)_2$.

Si n et k sont deux nombres entiers naturels on dit que n **domine** k si chaque chiffre de l'écriture binaire de n est supérieur ou égal au chiffre de même position dans l'écriture binaire de k.

Question 8. *a*) Déterminer si 5 domine 3 en justifiant.
b) Compléter sans justifier le tableau de l'annexe 3.
c) Conjecturer une règle permettant de déterminer la couleur $L_n[k]$ pour tous les entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

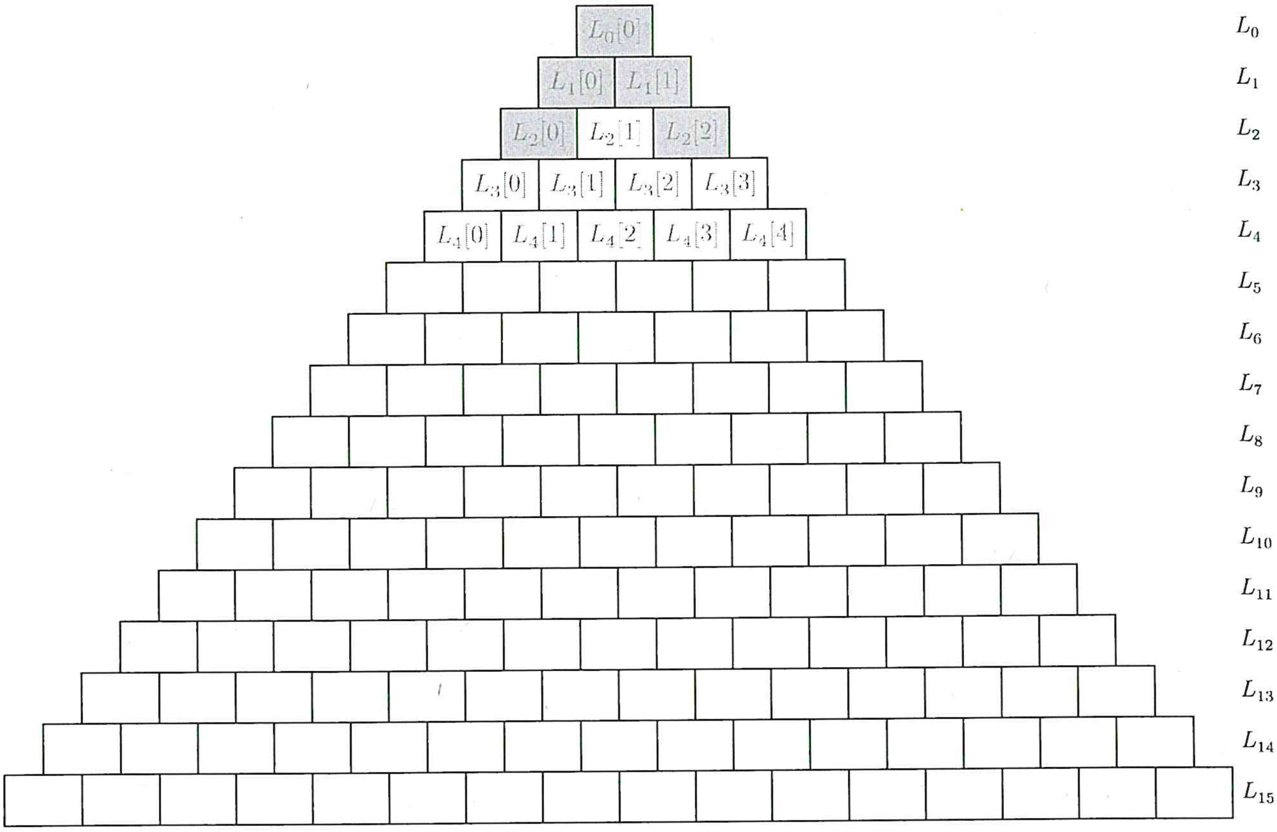
Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Notons $n = (n_a n_{a-1} \ldots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_b k_{b-1} \ldots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$ les écritures binaires de n et k. On considère que $k_i = 0$ si $b < i \leqslant a$ ce qui revient à ajouter des chiffres zéro à gauche de l'écriture de k pour qu'il ait autant de chiffres que n. On conservera ces notations dans tout le reste de l'exercice.

Question 9. Démontrer que $L_n[k] = $ gris si et seulement si n domine k.

Question 10. *a*) Déterminer, en justifiant, quelles lignes de la pyramide sont entièrement grises.
b) Déterminer, en justifiant, quelles lignes de la pyramide sont entièrement blanches à l'exception des cellules des extrémités.

Question 11. Démontrer que le nombre de cellules grises de la ligne L_n est 2^s où s est le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.

Annexe 1



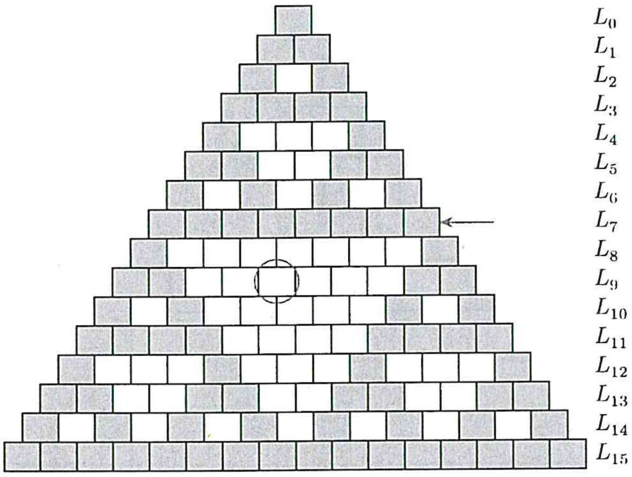
Annexe 2

n	1	5	5	6	6	6
k	0	1	3	4	3	2
Écriture binaire de n	$(1)_2$	$(101)_2$	$(101)_2$			
Écriture binaire de k	$(0)_2$	$(001)_2$				
n domine k	vrai	vrai				
$L_n[k]$	gris					

Correction

§1. Premiers exemples

Question 1. *a)*



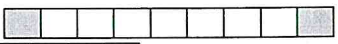
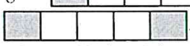
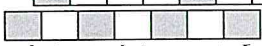
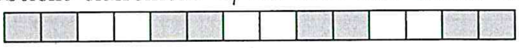
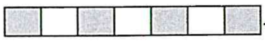
b) $L_9[4] =$ blanc.

Question 2. Le plus petit entier $n \geqslant 5$ tel que L_n est totalement grise est $n = 7$.

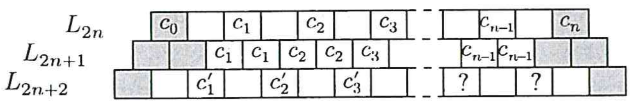
Question 3.

```
def suivante(L):
    n = len(L) - 1
    S = [None] * (n+2)
    S[0] = S[n+1] = 1
    for k in range(n):
        if L[k] == L[k+1]:
            S[k+1] = 0
        else:
            S[k+1] = 1
    return S
```

§2. Couleur et parité

Question 4. $L_8 =$  peut s'obtenir en intercalant des cellules blanches entre les cellules de $L_4 =$ . De même on obtient $L_{12} =$  peut en intercalant des cellules blanches entre les cellules de $L_6 =$ .
En dessinant deux fois de suite chaque cellule de L_3 on obtient clairement L_7 car elles sont toutes les deux entièrement grises et les longueurs correspondent. $L_{13} =$  est le dédoublement de $L_6 =$ .

Question 5. *a)*



b) L'hypothèse de la question se traduit par la représentation de L_{2n} ci-dessus (on a intercalé des cellules blanches). Il est alors clair d'après les règles de construction que $L_{2n+1}[0] = L_{2n+1}[1] =$ gris $= L_{2n}[0] = c_0$; de même pour les deux dernières cellules de L_{2n+1}.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, puisque $L_{2n}[2k-1] =$ blanc alors $L_{2n+1}[2k] =$ blanc si et seulement si $c_k =$ blanc ce qui montre que $L_{2n+1}[2k] = c_k$. De la même façon $L_{2n}[2k+1] =$ blanc donc $L_{2n+1}[2k+1] = c_k$.
En définitive on a bien démontré que L_{2n+1} est telle que représentée avec les cellules de couleur c_k dédoublées.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. D'après la question précédente $L_{2n+1}[2k] = L_{2n+1}[2k+1] = c_k$ donc la règle de propagation donne $L_{2n+2}[2k+1] = \text{blanc}$.
D'autre part $c'_k = L_{2n+2}[2k]$ s'obtient avec les règles de propagation en comparant c_{k-1} et c_k qui sont des cases consécutives de L_n. Ainsi $c'_k = L_{n+1}[k]$.
En définitive L_{2n+2} s'obtient bien en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_{n+1}.

Question 6. La propriété est vraie pour les petites valeurs de n, en particulier pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour $n \geqslant 0$. D'après la question précédente il est alors vrai pour $n+1$. Par récurrence le résultat est donc vrai pour tout n.

§3. Écriture binaire

Question 7. *a*) $0 = (0)_2 \quad 1 = (1)_2 \quad 2 = (10)_2 \quad 3 = (11)_2 \quad 4 = (100)_2 \quad 5 = (101)_2 \quad 6 = (110)_2$
b) $(10101)_2 = 21$, $(1010)_2 = 10$.

Question 8. *a*) $\begin{array}{l} 5 = (\ 1\ \ 0\ \ 1\ )_2 \\ \ \geqslant\ \leqslant\ \geqslant \\ 3 = (\ 0\ \ 1\ \ 1\ )_2 \end{array}$ donc 5 ne domine pas 3 à cause du deuxième chiffre.

b)

n	1	5	5	6	6	6
k	0	1	3	4	3	2
Écriture binaire de n	$(1)_2$	$(101)_2$	$(101)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$
Écriture binaire de k	$(0)_2$	$(001)_2$	$(011)_2$	$(100)_2$	$(011)_2$	$(010)_2$
n domine k	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai
$L_n[k]$	gris	gris	blanc	gris	blanc	gris

c) On conjecture que n domine $k \iff L_n[k] = \text{gris}$.

Question 9. Procédons par récurrence sur le nombre a de chiffres binaires de n : définissons $\mathcal{P}(a)$ la propriété « pour tous entiers naturels n et k pouvant s'écrire avec a chiffres binaires et tels que $k \leqslant n$, $L_n[k] = \text{gris}$ si et seulement si n domine k ». Si $a = 1$, les seuls cas à regarder sont $L_0[0] = L_1[0] = L_1[1] = \text{gris}$ qui confirment bien $\mathcal{P}(1)$.
Supposons $\mathcal{P}(a)$, et démontrons $\mathcal{P}(a+1)$. Soient n et k pouvant s'écrire avec $a+1$ chiffres, et $k \leqslant n$. Avec les notations proposées, on a $n = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$. Posons $n' = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1)_2$ et $k' = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1)_2$. Alors $n = 2n' + n_0$ et $k = 2k' + k_0$, où n' et k' peuvent s'écrire avec a chiffres, et bien entendu $k' \leqslant n'$.
Si pour tout i, $n_i \geqslant k_i$, alors $n_0 \geqslant k_0$ et d'après [*] $L_n[k] = L_{2n'+n_0}[2k' + k_0] = L_{n'}[k'] = \text{gris}$ en utilisant $\mathcal{P}(a)$.
Si il existe $0 \leqslant i \leqslant a$ tel que $n_i < k_i$, alors ou bien $n_0 < k_0$ et d'après [*] $L_n[k] = \text{blanc}$, ou bien $n_0 \geqslant k_0$ et $i \geqslant 1$. Mais alors $L_n[k] = L_{n'}[k'] = \text{blanc}$ en appliquant $\mathcal{P}(a)$.
Dans tous les cas, $\mathcal{P}(a) \implies \mathcal{P}(a+1)$ et puisque $\mathcal{P}(0)$ la propriété est démontrée.

Question 10. *a*) Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $k \leqslant n$, $L_n[k] = \text{gris}$, alors en particulier $L_n[2^i] = \text{gris}$ donc nécessairement $n_i \geqslant 1$, et ce dès que $2^i \leqslant n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i \leqslant a, n_i = 1$: tous les chiffres de n sont des 1. Ainsi $n = 2^a - 1$.
Réciproquement, si $n = 2^a - 1$ alors tous ses chiffres sont des 1 et la propriété de la question 9 est facilement vérifiée pour tout k : la ligne $L(n)$ ne contient que des cellules grises.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $0 < k < n$, $L_n[k] = \text{blanc}$, alors en particulier $L_n[2^i] = \text{blanc}$. Or tous les chiffres de 2^i sont nuls sauf k_i, donc c'est nécessairement celui-là qui est supérieur strictement à celui de n : $n_i < k_i = 1$, soit $n_i = 0$ et ce dès que $2^i < n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i < a, n_i = 0$: tous les chiffres de n sont des 0, sauf celui le plus à gauche. Ainsi $n = 2^{a-1}$.
Réciproquement, si $n = 2^{a-1}$, alors tous ses chiffres sauf le plus à gauche sont nuls. Si $k = 0$ tous ses chiffres sont nuls et l'on retrouve bien $L_n[k] = \text{gris}$. Si $k = n$ les chiffres de k sont ceux de n et ne leur sont pas supérieurs ; ainsi $L_n[n] = \text{gris}$. Si $0 < k < n$, il existe un chiffre de k non nul, et ce chiffre est dans la même position qu'un chiffre nul de n (car $k \neq n$), donc $L_n[k] = \text{blanc}$ d'après la propriété de la question 9.
En définitive, les lignes entièrement blanches exceptés les extrémités sont les lignes $L(2^{a-1})$.

Question 11. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $L_n[k]$ = gris si et seulement si l'écriture binaire de k contient des zéros aux mêmes positions que ceux de l'écriture binaire de n. Les autres chiffres binaires de k peuvent prendre n'importe quelle valeur.

En notant s le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de n on obtient tous les k tels que $L_n[k]$ = gris en considérant toutes les combinaisons de 0 et 1 pour les s chiffres « libres » et en plaçant des 0 sur les autres chiffres.

Il y a ainsi 2^s nombres k tels que $L_n[k]$ = gris donc 2^s cellules grises dans $L(n)$. (s est aussi la somme des chiffres binaires de n).

Supplément : De moins en moins de cellules grises

Question 1. $M(1) = E(1) = 2$; $M(2) = 6$ et $E(2) = 7$.

Question 2. *a*) L'écriture binaire de $2n$ est celle de n avec un 0 ajouté tout à droite. Ainsi les deux écritures ont le même nombre s de chiffres 1 et $I(2n) = I(n)$.

L'écriture binaire de $2n+1$ contient exactement un chiffre 1 de plus donc $I(2n+1) = 2^{s+1} = 2 \times 2^s = 2I(n)$.

b) $M(r) = I(2^{r-1}) + I(2^{r-1}+1) + \cdots + I(n) + \cdots + I(2^r - 1)$. $M(r+1) = I(2^r) + I(2^r+1) + \cdots + I(2n) + I(2n+1) + \cdots + I(2^{r+1}-1)$.

On peut grouper toutes les lignes intervenant dans $M(r+1)$ deux par deux avec $I(2^r) + I(2^r+1) = I(2 \times 2^{r-1}) + I(2 \times 2^{r-1}+1) = I(2^{r-1}) + 2I(2^{r-1}) = 3I(2^{r-1})$ et $I(2n) + I(2n+1) = I(n) + 2I(n) = 3I(n)$.

En sommant toutes ces égalités on obtient $M(r+1) = 3M(r)$.

Question 3. *a*) Notons $K(n) = n+1$ le nombre d'entiers dans la ligne $L(n)$. Alors $K(2n)+K(2n+1) = 2n+1+2n+2 = 4n+3 = 4K(n) - 1 < 4K(n)$.

Si $n \geqslant 1$, $K(n) \geqslant 2$ donc $\frac{1}{2}K(n) - 1 \geqslant 0$ et ainsi $4K(n) - 1 \geqslant \frac{7}{2}K(n)$.

En définitive, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{7}{2}K(n) \leqslant K(2n) + K(2n+1) < 4K(n)$. En groupant deux à deux les termes dans $E(r+1)$ comme dans la question précédente et en sommant les inégalités on obtient aisément $\frac{7}{2}E(r) \leqslant E(r+1) < 4E(r)$.

b) $\dfrac{1}{4E(r)} < \dfrac{1}{E(r+1)} \leqslant \dfrac{2}{7E(r)}$, donc $\dfrac{3M(r)}{4E(r)} < \dfrac{3M(r)}{E(r+1)} \leqslant \dfrac{6M(r)}{7E(r)}$, ce qu'il fallait démontrer.

c) $P(1) = 1$ donc $P(2) \leqslant \dfrac{6}{7}$ puis $P(3) \leqslant \dfrac{6}{7} \times \dfrac{6}{7}$ et en définitive $P(r) \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{r-1}$.

La proportion $P(r)$ devient de plus en plus faible et s'approche de 0 à mesure que r devient grand.