Boites de macarons inversibles

Un triplet (A ; B ; C) est dit "pythagoricien" si A, B, C sont des entiers naturels non nuls tels que $A^2 + B^2 = C^2$

Partie 1 : Triplets pythagoriciens contenant 2021

1) Les triplets (2021 ; 180 ; 2029) et (2021 ; 1520 ; 2529) sont-ils pythagoriciens ?

2) Soit un triplet pythagoricien (2021 ; B ; C)

a) Montrer que $(C - B)(C + B) = 2021^2$

b) Sachant que $2021 = 43 \times 47$ (1 ; 2021 ; 43 et 47 étant les seuls entiers naturels diviseurs de 2021), déterminer tous les triplets pythagoriciens de la forme (2021 ; B ; C).

Partie 2 : Application des triplets pythagoriciens :

Un pâtissier vend des boites carrées remplies de deux sortes de macarons (représentés par des disques gris et noirs). Ce pâtissier veut trouver des boites où il peut former un carré central de macarons gris entouré de macarons noirs, puis un carré central de macarons noirs entouré de macarons gris *sans changer le nombre de macarons de chaque sorte* (pour avoir deux présentations différentes d'un même produit) : on dira que ces boites sont "inversibles", comme dans l'exemple ci-dessous d'une boite de 100 macarons composée de 64 macarons gris et de 36 macarons noirs.

1) *a*) À l'aide de la boite inversible ci-dessus, montrer qu'il existe une boite inversible contenant 400 macarons, puis une boite inversible contenant 1600 macarons.

***b*)** Montrer qu'il existe une infinité de boites inversibles.

Pour une boite inversible on note : G le nombre de macarons gris,
N le nombre de macarons noirs,
T le nombre total de macarons.

2) Justifier que $G = A^2$, $N = B^2$ et $T = C^2$ où (A ; B ; C) est un triplet pythagoricien.

3) Montrer qu'il n'existe pas de boite inversible contenant autant de macarons gris que de macarons noirs (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers).

4) *a*) Justifier par des arguments géométriques que G, N et T sont pairs.

***b*)** On rappelle qu'un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $(2p + 1)$ avec p entier.
Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.

***c*)** Déduire que A, B et C sont pairs.

5) *a*) Soient x, y, k entiers naturels non nuls avec $x < y$: montrer que $(2kxy \,;\, k(y^2 - x^2) \,;\, k(x^2 + y^2))$ est pythagoricien.

***b*)** *Dans cette question on admettra que, à une inversion de A et B près, les triplets pythagoriciens* (*A, B, C*) *avec A, B, C tous pairs sont ceux de la forme* $(2kxy \,;\, k(y^2 - x^2) \,;\, k(x^2 + y^2))$ *avec :*

- *k entier naturel non nul,*
- *x et y entiers naturels impairs tels que $x < y$.*

Le pâtissier souhaite trouver les trois plus petites boites inversibles (c'est-à-dire les trois plus petites valeurs de T possibles) : en faisant varier k, x, y de façon ordonnée, déterminer les valeurs de T, G, N pour chacune de ces trois boites.

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles) :

Partie 1 :

1) $180^2 + 2021^2 = 4\,116\,841 = 2029^2$ donc (2021 ; 180 ; 2029) est pythagoricien.

$2021^2 + 1520^2 = 6\,394\,841$ et $2529^2 = 6\,395\,841$ donc (2021 ; 1520 ; 2529) n'est pas pythagoricien (attention au chiffre des milliers !)

2) *a*) $2021^2 + B^2 = C^2 \Leftrightarrow 2021^2 = C^2 - B^2 = (C - B)(C + B)$

b) Soient $X = C - B$ et $Y = C + B$ on a : $\underline{X < Y \text{ et } XY = 2021^2}$ (alors $C = (X+Y)/2$ et $B = C - X$),

Or $2021^2 = 43^2 \times 47^2 = 43 \times 43 \times 47 \times 47$ d'où les valeurs de X à envisager :

- $X = 1$ et $Y = 43 \times 43 \times 47 \times 47$: on trouve $C = (X+Y)/2 = 2\,042\,221$ et $B = C - X = 2\,042\,220$
- $X = 43$ et $Y = 43 \times 47 \times 47$: $C = 47\,515$ et $B = 47\,472$
- $X = 43^2$ et $Y = 47^2$: $C = 2029$ et $B = 180$
- $X = 47$ et $Y = 43 \times 43 \times 47$: $C = 43\,475$ et $B = 43\,428$

D'où les triplets solutions :

(2021 ; 180 ; 2029) ; (2021 ; 43 428 ; 43 475) ; (2021 ; 47 472 ; 47 515) et (2021 ; 2 042 220 ; 2 042 221).

Partie 2 :

1) *a*) On obtient encore une boite carrée inversible en remplaçant dans l'exemple chaque macaron par un carré de macarons 2 x 2 de même couleur, d'où 400 macarons (autre façon de raisonner : on peut aussi placer 4 boites de 100 macarons côte à côte en carré de 2 x 2, et rapprocher les carrés de macarons centraux de même couleur au centre de l'ensemble, on obtient bien alors une boite inversible)

On procède la même façon en partant de la boite inversible de 400 macarons pour obtenir une boite inversible de 1600 macarons.

b) En réitérant ce processus, on peut obtenir des boites inversibles contenant 100×4^n macarons, d'où une infinité de boites carrées inversibles.

Remarque : on peut aussi penser à remplacer chaque macaron par des carrés de macarons n x n de même couleur, d'où une infinité de boites inversibles du type $100 \times n^2$.

2) Les macarons noirs, gris et totaux formant tous des carrés dans la boite inversible on a $G = A^2$; $N = B^2$; $T = C^2$

Or $T = G + N$ donc $C^2 = A^2 + B^2$ d'où (A ; B ; C) triplet pythagoricien.

3) $T = G + N$ donc si $G = N$ alors $T = 2G$ d'où $C^2 = 2A^2$ donc $2 = C^2/A^2$ donc $\sqrt{2} = C/A$: impossible car $\sqrt{2}$ irrationnel.

4) *a*) G et N sont pairs car lorsqu'ils entourent le carré central, les macarons peuvent se décomposer en un nombre pair de lignes et un nombre pair de colonnes. On déduit que $T = G + N$ est aussi pair.

b) Soit $X = 2p+1$ impair, $X^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2P + 1$ avec $P = 2p^2 + 2p$ entier, donc X^2 est impair.

c) On sait $G = A^2$ est pair, or si A était impair A^2 serait impair, donc A n'est pas impair, donc A est pair.

Même raisonnement pour B et C.

5) *a*) Soient $A = 2kxy$; $B = k(y^2 - x^2)$; $C = k(x^2 + y^2)$: A, B, C sont des entiers naturels non nuls avec :

$A^2 + B^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^2 - x^2)^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^4 + x^4 - 2y^2x^2) = k^2(y^4 + x^4 + 2y^2x^2) = k^2(y^2 + x^2)^2 = C^2$

Donc (A ; B ; C) pythagoricien.

b) Il s'agit de trouver les 3 plus petites valeurs de $T = C^2$ et donc de C.

Ayant montré que (A ; B ; C) est un triplet pythagoricien avec A, B, C tous pairs, on ordonne la recherche sur $C = k(x^2 + y^2)$ (selon la formule proposée) suivant les valeurs de k puis x puis y (avec $y > x$ et impairs)

$k = 1$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>10</u>**

$y = 5$ on obtient C = **<u>26</u>**

$y = 7$ on obtient C = **50** et on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures aux 3 précédentes.

$x = 3$; $y = 5$ on obtient C = **34**

$y = 7$: on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$x = 5$; $y = 7$: on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$k = 2$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>20</u>**

$y = 5$ on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26

$x = 3$; $y = 5$ on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

$k = 3$: $x = 1$; $y = 3$: C = 30

On s'arrête-là pour k car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

Donc C = 10 ; 20 ; 26 et avec A = $2kxy$ et B = $k(y^2 - x^2)$ on déduit les valeurs de A et de B correspondantes :

Pour C = 10 : k = 1 ; x = 1 ; y = 3 d'où A = 6 ; B = 8

Boite 10 x 10 : T=C²= 100 macarons : G=A²= 64 d'une sorte et N= B² = 36 de l'autre (donnée en exemple).

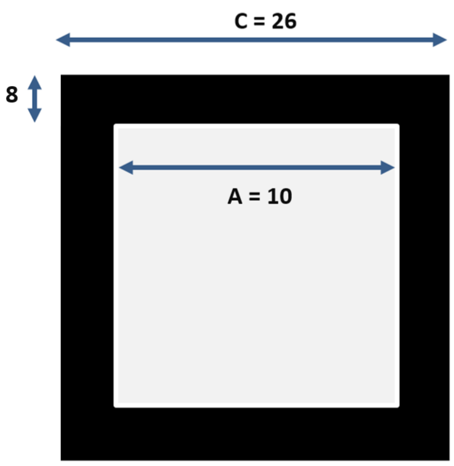
Pour C = 20 : k = 2 ; x = 1 ; y = 3 d'où A = 12 ; B = 16

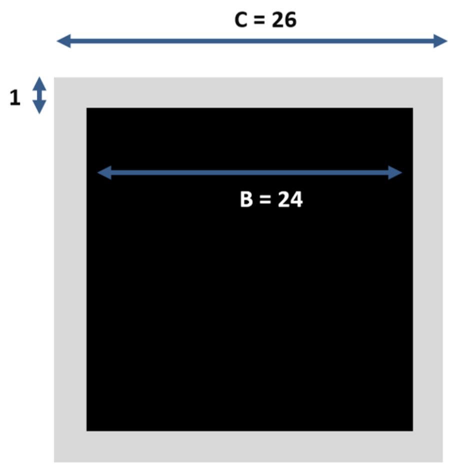
Boite 20 x 20 : T = 400 macarons : G = 144 d'une sorte et N = 256 de l'autre (trouvée au I) 1) a))

Pour C = 26 : k = 1 ; x = 1 ; y = 5 d'où A = 10 ; B = 24

Boite 26 x 26 : T = 676 macarons : G = 100 d'une sorte et N = 576 de l'autre.

Réciproquement : À strictement parler, il n'a pas été clairement prouvé précédemment que les conditions sur C sont suffisantes (seulement nécessaires), donc on doit vérifier que réciproquement cette dernière boite de 26 x 26 est bien inversible par exemple par un dessin de ce type (celles à 100 et 400 macarons ayant été trouvées dans II] 1) a), il n'est pas utile de le vérifier) :





Nombre de lignes dans le cadre noir : (26-10)/2 = 8, et on a bien 4 x 8 x 10 + 4 x 8² = 576 macarons noirs

Nombre de lignes dans le cadre gris : (26-24)/2 = 1, et on a bien 4 x 1 x 24 + 4 x 1 = 100 macarons gris

On a vérifié que, réciproquement, la boite 26 x 26 est bien inversible.