Algorithmique en seconde

Académie de Lyon

Bonnafet Jean-Louis
Fasquelle Ludovic
Gamel Stéphane
Gautheron Philippe
Lame François
Mény Jean-Manuel
Xavier Lionel

1 Les impots

Dans les programmes

Fonctions par morceaux, represéntion graphique d'une fonction,fonctions de deux variables, résolution d'une équation du type f (x) = k. Algorithmique, instructions conditionnelles.

1.1 L'imposition

L'impôt sur le revenu dépend de deux quantités R (le revenu en €) et N le nombre de parts. Le calcul utilise le quotient familial $QF = \frac{R}{N}$
(source : Article 197 modifié par LOI n°2008-1425 du 27 décembre 2008 - art 2).
Il est fait application des règles suivantes pour le calcul de l'impôt sur le revenu, l'impôt est calculé en appliquant à la fraction de chaque part de revenu qui excède 5 852 € le taux de :
- 5, 50 % pour la fraction supérieure à 5 852 € et inférieure ou égale à 11 673 €
- 14 % pour la fraction supérieure à 11 673 € et inférieure ou égale à 25 926 €
- 30 % pour la fraction supérieure à 25 926 € et inférieure ou égale à 69 505 €
- 40 % pour la fraction supérieure à 69 505 €

Ecrire un programme, qui renvoie le montant de l'impôt pour un revenu R et un nombre de part N.

1.2 Prolongement possible

1. Faire tracer la fonction impot à N fixé, à l'aide d'algobox (ou bien sous geogebra)
2. Lorsque N vaut 1, déterminer la(es) valeur(s) de R telle(s) que le montant de l'impôt corresponde à la moitié du revenu R.

2 Le pompiste

Dans les programmes

Mettre un problème en équation. Travail sur les fonctions polynômes de degré 2.

Un pompiste vend le litre d'essence au prix de 1,20 €. Le prix d'achat est pour lui de 0,85 € le litre. Il sait qu'il peut compter sur une vente journalière de 1 000 litres et qu'à chaque baisse de 1 centime qu'il consent pour le prix du litre, il vendra 100 litres de plus par jour.
On nombre x le nombre de baisses de 1 centime. On note $f(x)$ le bénéfice (en euros) correspondant.

1. A l'aide d'un programme, déterminer le prix de vente du carburant correspondant à un bénéfice maximal.

2. Si cela n'a pas été fait dans l'algorithme précédent, quel algorithme peut-on écrire pour vérifier l'unicité de la réponse au problème précédent ?
3. En utilisant les résultats de la question précédente, que pouvez vous dire du maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1000 + 100\,x)(1{,}20 - x/100 - 0.85) \quad ?$$

3 Une aire variable

Dans les programmes

Fonctions par morceaux. Équations de droites. Simulation.

3.1 Coupe d'un rectangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère le rectangle $OACB$ de sommets O, $A(17;0)$, $B(0;11)$, $C(17;11)$.
On note Δ_m une droite passant par B et de coefficient directeur m (où m est un réel quelconque).
On note R le point d'intersection de Δ_m avec l'axe des abscisses (pour $m \neq 0$).
On note enfin D le point défini comme suit :

- lorsque $m \geqslant 0$: $D = C$.
- lorsque $m < 0$: D est le deuxième point d'intersection de Δ_m avec l'un des bords du rectangle $OACB$.

1. Déterminer les coordonnées du point R.
2. Écrire l'algorithme suivant pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	les coordonnées du point D et affichage du point dans un repère

3. On note $\mathscr{P}$ le polygone se trouvant sous la droite Δ_m et délimité par les côtés du rectangle $OACB$.
Écrire les algorithmes suivants pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	un dessin du polygone $\mathscr{P}$

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	l'aire du polygone $\mathscr{P}$

3.2 Tirages au hasard

Écrire l'algorithme suivant sur machine :

Entrées : un réel m, un entier $n > 0$
début
  répéter n **fois**
    Tirer au hasard dans $[0;17]$ un réel x
    Tirer au hasard dans $[0;11]$ un réel y
    Tester si le point $M(x;y)$ est à l'intérieur de $\mathscr{P}$
    Afficher éventuellement le point avec des couleurs différentes suivant qu'il est ou qu'il n'est pas dans le polygone $\mathscr{P}$
fin
Sortie : Affichage du produit $17 \times 11 \times \frac{\text{Nombre de points } M \text{ dans } \mathscr{P}}{n}$

Quel constat fait-on pour de grandes valeurs de n ?

4 Divisions dans N

Dans les programmes

Expressions algébriques, fonction homographique, résoudre un problème, raisonner et argumenter

4.1 Scénario 1

Pour un certain naturel n : $2n+3$ est un diviseur de $6n+43$. On cherche à déterminer une valeur de n

1. Ecrire un algorithme permettant de trouver, si possible, une valeur de n
2. Ecrire sous forme d'une fraction la quantité $3 + \dfrac{34}{2n+3}$
3. Ecrire un algorithme permettant de trouver toutes les valeurs possibles de $2n+3$ pour n naturel de 0 jusqu'à N (valeur à déterminer)
4. En utilisant les réponses des questions 2 et 3. retrouver le résultat du 1
5. La valeur de n est-elle unique ? Argumenter.

4.2 Prolongement possible

Pour un (des) certain(s) naturel(s) n : $5n+9$ divise $46574n–327$; écrire un algorithme permettant de trouver, si possible, une valeur ou plusieurs valeurs de n

5 Dichotomie

Dans les programmes

Une introduction possible à la dichotomie (sans fonctions)

Le jeu :
2 personnes : 1 joueur et 1 maitre du jeu
Le maître du jeu affiche deux nombres entiers a et b (a<b) et choisit un nombre entier N secret entre a et b (a et b compris). Le joueur doit essayer de deviner le nombre secret en se conformant aux règles suivantes :

- Le joueur propose un nombre.
- Le maître du jeu compare la proposition au nombre secret et répond : Gagné, Plus ou Moins.
- Le joueur, s'il n'a pas encore gagné, propose un autre nombre et ce jusqu'à ce qu'il gagne.

On appelle " un coup " la succession d'une annonce du joueur et de la réponse du maître du jeu.
Partie 1 : le jeu contre la machine
On prend a = 1 et b = 30.

1. Écrire les différentes étapes du jeu sous forme d'algorithme.
2. Programmer cet algorithme et le tester.
3. Améliorer le programme pour qu'il affiche de plus le nombre de coups qui ont été nécessaires à la victoire.
4. (a) Faire jouer dix parties minimum à chaque élève de classe et collecter les nombres de coups nécessaires à la victoire par partie.
   (b) Résumer cette série par un diagramme en bâton accompagné de la moyenne des résultats obtenus.
   (c) Déterminer l'intervalle dans lequel se trouvent 95% des valeurs de la série.

Partie 2 : Recherche d'une stratégie de gain rapide.
L'objectif est de trouver une stratégie plus efficace pour amener rapidement à la victoire et de la tester en faisant en sorte que l'ordinateur joue contre lui-même.

5 Étudier pour cela l'algorithme suivant.

```
Variables
-n nombre secret
-x proposition du joueur
-c compte le nombre d'essai
-fini vaut 1 ou 0 selon que le joueur a gagné ou pas encore.
-a, b bornes de l'intervalle dans lequel aura lieu la prochaine proposition.
Initialisation
-n est un entier aléatoire entre 1 et 30.
-fini prend la valeur 0.
-a prend la valeur 1
-b prend la valeur 30
-c prend la valeur 0
début
    si Si n = 30 alors
        c prend la valeur 1
        x prend la valeur 30
    sinon
        while fini=0 do
            c prend la valeur c+1
            x prend la valeur partie entière de (a+b)/2
            si x = n alors
                fini prend la valeur 1
            sinon
                si x < n alors
                    Afficher "Plus"
                    a prend la valeur x
                sinon
                    Afficher "Moins"
                    b prend la valeur x
fin
Sortie :
Afficher "Le nombre choisi était : " x
Afficher "Partie gagnée en " c "coups."
```

6. Programmer cet algorithme et le tester.
7. Reprendre la question 4 avec ce programme. Comparer les résultats issus des deux stratégies.

6 Somme des carrés

Dans les programmes

Expressions algébriques, expérimenter, prises d'iniatives, application à la géométrie. Algorithmique, boucles, tests, structures conditionnelles (tant que)

6.1 Le 85×135

On souhaite écrire si possible le nombre 85×135 comme la somme de carrés de nombre entiers inférieurs ou égaux à n où n est un entier inférieur à 100. On souhaite bien sûr éviter la solution triviale $1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots$

1. Ecrire un algorithme permettant de répondre à cette question.
2. Tester l'algorithme pour $n = 100$ et donner s'il y a une réponse tous les entiers trouvés. Vérifier la réponse.
3. Tester l'algorithme pour $n = 99$ et donner s'il y a une réponse, tous les entiers trouvés.
4. Tester l'algorithme pour $n = 95$ et donner s'il y a une réponse, tous les entiers trouvés.
5. Tester l'algorithme pour $n = 85$ et donner s'il y a une réponse, tous les entiers trouvés.
6. Peut-on finalement écrire $85 * 135$ sous différentes sommes de carrés et comment peut on expliquer ce phénomène ?
7. Expliquer dans le choix de n ce qui est fait la particularité de la solution obtenue ? **Prolongement :**
8. (a) Modifier l'algorithme précédent en remplaçant $85 * 135$ par 302. Tester l'algorithme pour $n = 11$ et donner s'il y a une réponse, tous les entiers trouvés.
   (b) Calculer $112 + 102 + 92$?
   (c) Que conclure ?
9. Modifier l'algorithme précédent pour pouvoir afficher les réponses pour $n = 17$ puis $n = 16$ puis 15 etc. . .

6.2 Coupe au carré

1. Situation 1 :
   Un élève a une faculté particulière : il ne sait faire aucune multiplication mais connaît tous les carrés des entiers de 1 à 100. Il doit effectuer le produit 85×135. Pour cela il dessine un rectangle dont les dimensions sont 85 (mm) par 135 (mm). Dans ce rectangle il trace le plus grand carré possible, fait de même dans le rectangle restant et ainsi de suite. . . Il obtient huit carrés. En modifiant l'algorithme du 1.2, donner ces huit nombres.
2. Situation 2 :
   Reprendre l'exercice avec un rectangle de dimension 450 et 136

7 Ératosthène parabolique

Dans les programmes

Travail sur les équations de droite, sur la fonction carré, notion de courbe représentative, sur l'intersection de deux droites, révision sur la notion de diviseur d'un entier, nombres premiers.

Soit f la fonction carré et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Écrire un programme avec ALGOBOX qui représente les segments dont une extrémité est le point d'abscisse -2 de $\mathscr{P}$ et l'autre extrémité le point d'abscisse i de $\mathscr{P}$, où i parcourt l'ensemble des entiers entre 1 et 10.
2. Quellle conjecture peut-on émettre quant à l'intersection d'un segment d'extrémités $A(-2;4)$ et $B_i\left(i;i^2\right)$. Démontrer cette conjecture.
3. Modifier le programme précédent en changeant le point A d'abscisse -2 de la courbe en le point A d'abscisse -3 (les autres extrémités resteront inchangées).

   Quelle conjecture faîtes vous dans ce cas ? Démontrer.
4. Modifier le programme afin qu'il demande en premier lieu un entier naturel non nul k puis trace les segments $[AB_i]$ où $A\left(-k;k^2\right)$. La conjecture se généralise-t-elle ? Démontrer.
5. Proposer un programme traçant certains des segments précédemment définis (c'est à dire les segments $[A_jB_i]$ où i et j sont des entiers naturels et $A_j\left(-j,j^2\right)$, $B_i\left(i;i^2\right)$) de façon à ce que l'ensemble des entiers $k \geqslant 2$ tels que le point $C(0;k)$ ne se trouve pas sur l'un de ces segments soit exactement l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100. On se donnera pour contrainte de tracer le moins possible de ces segments.