Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Une aire variable

Dans les programmes

Aire d'une figure élémentaire. Fonctions par morceaux. Équations de droites. Simulation. Conjecturer une formule (Pick).

1 Coupe d'un rectangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère le rectangle $OACB$ de sommets O, $A(17;0)$, $B(0;11)$, $C(17;11)$.
On note Δ_m une droite passant par B et de coefficient directeur m (où m est un réel quelconque).
On note R le point d'intersection de Δ_m avec l'axe des abscisses (pour $m \neq 0$).
On note enfin D le point défini comme suit :

– lorsque $m \geqslant 0$: $D = C$.
– lorsque $m < 0$: D est le deuxième point d'intersection de Δ_m avec l'un des bords du rectangle $OACB$.

1. Déterminer les coordonnées du point R.
2. Écrire l'algorithme suivant pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	les coordonnées du point D et affichage du point dans un repère

3. On note $\mathscr{P}$ le polygone se trouvant sous la droite Δ_m et délimité par les côtés du rectangle $OACB$.
Écrire les algorithmes suivants pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	un dessin du polygone $\mathscr{P}$

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	l'aire du polygone $\mathscr{P}$

2 Tirages au hasard

Écrire l'algorithme suivant sur machine :

Entrées : un réel m, un entier $n > 0$
début
  répéter n **fois**
    Tirer au hasard dans $[0;17]$ un réel x
    Tirer au hasard dans $[0;11]$ un réel y
    Tester si le point $M(x;y)$ est à l'intérieur de $\mathscr{P}$
    Afficher éventuellement le point avec des couleurs différentes suivant qu'il est ou qu'il n'est pas dans le polygone $\mathscr{P}$
fin
Sortie : Affichage du produit $17 \times 11 \times \frac{\text{Nombre de points } M \text{ dans } \mathscr{P}}{n}$

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Quel constat fait-on pour de grandes valeurs de n ?

3 Des points à coordonnées entières

1. Quelles sont les valeurs de m telles que le point D soit à coordonnées entières ?
2. Écrire sur machine l'algorithme suivant :

   Entrées : un réel m tel que D soit à coordonnées entières
   début
   Compter le nombre n_i de points à coordonnées entières qui sont à l'intérieur strictement du polygone $\mathscr{P}$
   Compter le nombre n_b de points à coordonnées entières qui se trouvent sur un côté du polygone $\mathscr{P}$
   fin
   Sortie : Affichage de n_i et n_b

   Après observation de résultats, vous chercherez à émettre une conjecture sur une formule liant l'aire de $\mathscr{P}$ et les valeurs de n_i et n_b.

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Éléments de réponses – XCAS

1 Coupe d'un rectangle

Les coordonnées du point R : $\left(\frac{-11}{m};0\right)$.
Calcul des coordonnées du point D et affichage du point :

Xcas

```
saisir(m);;
si m>=0 alors xD:=17;yD:=11;fsi;;
si (m<0 et m>-11/17) alors xD:=17;yD:=17*m+11;fsi;;
si m<=-11/17 alors xD:=-11/m;yD:=0;fsi;;
afficher(xD,yD);
affichage(point(xD,yD),display=line_width_5)
```

Représentation du polygone $\mathscr{P}$:

Xcas

```
saisir(m);;
si m>=0 alors xD:=17;yD:=11;
p:=polygone(point(0,0),point(17,0),point(xD,yD),point(0,11));
fsi;;
si (m<0 et m>-11/17) alors xD:=17;yD:=17*m+11;
p:=polygone(point(0,0),point(17,0),point(xD,yD),point(0,11));
fsi;;
si m<=-11/17 alors xD:=-11/m;yD:=0;
p:=polygone(point(0,0),point(xD,yD),point(0,11));
fsi;;
affichage(p,display=line_width_6+rempli);
```

Le calcul de l'aire du polygone $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{A}(m)=\begin{cases}17\times 11 & \text{pour } m\in[0,+\infty[\\ \frac{17}{2}\times(22+17m) & \text{pour } m\in\left]\frac{-11}{17},0\right[\\ \frac{-11^2}{2m} & \text{pour } m\in\left]-\infty;\frac{-11}{17}\right]\end{cases}$$

ou encore :

$$\mathscr{A}(m)=\begin{cases}\frac{1}{2}\times\left(11+y_D\right)\times 17 & \text{pour } m\in\left[\frac{-11}{17},+\infty\right[\\ \frac{1}{2}\times 11\times x_D & \text{pour } m\in\left]-\infty;\frac{-11}{17}\right]\end{cases}$$

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Xcas

```
A(m):={
si m>=0 alors return 17*11;fsi;
si (m<0 et m>-11/17) alors return 17/2*(22+17*m);fsi;
si (m<=-11/17) alors return -11^2/(2*m);fsi;
}:;
```

2 Tirages au hasard

Algorithme de tirages au hasard :

Xcas

```
saisir(m):; /* m: coefficient directeur */
saisir(n):; /* n : nombre de points tirés */
compteur:=0:; /* compte le nb de points dans le polygone */
pour k de 1 jusque n faire
x:=rand(0,17);y:=rand(0,11);
si y<=m*x+11 alors compteur:=compteur+1;fsi;
fpour:;
afficher(evalf(17*11*compteur/n));
```

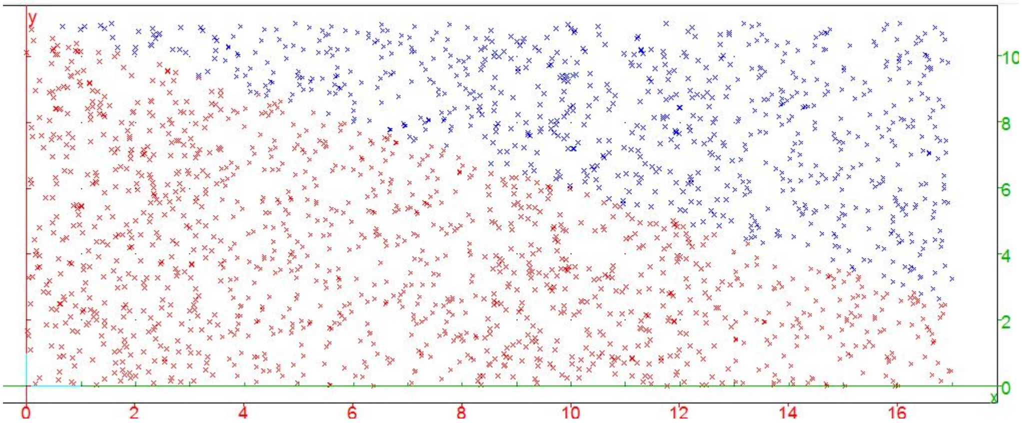
En prenant n "assez grand", les valeurs obtenues sont très proches de l'aire de $\mathscr{P}$.
On peut aussi écrire une version avec affichage des points (les deux affichages sont de couleurs différentes suivant que le point est en-dessous ou au-dessus de la droite Δ_m) :

Xcas

```
saisir(m):; /* m: coefficient directeur */
saisir(n):; /* n : nombre de points tirés */
compteur:=0:; /* compte le nb de points dans le polygone */
listein:=[]:;listeout:=[]:;
pour k de 1 jusque n faire
x:=rand(0,17);y:=rand(0,11);
si y<=m*x+11 alors
compteur:=compteur+1;listein:=append(listein,point([x,y]));
sinon listeout:=append(listeout,point([x,y]));
fsi;
fpour:;
afficher(evalf(17*11*compteur/n));
affichage(listein,red);
affichage(listeout,blue);
```

ce qui donne par exemple ($m = -0,5$, $n = 5000$) :

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique



3 Des points à coordonnées entières

1. CAS 1- Le point D est un point du segment $[OA]$.
   Le point D a dans ce cas pour coordonnées $\left(\frac{-11}{m}, 0\right)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $\frac{-11}{m} = j$ avec $j \in \{1; 2; \ldots; 17\}$. Les valeurs possibles de m sont donc les valeurs de l'ensemble $\left\{\frac{-11}{1}; \frac{-11}{2}; \ldots; \frac{-11}{17}\right\}$.

   CAS 2- Le point D est un point du segment $[AB]$.
   Le point D a dans ce cas pour coordonnées $(17; 17m+11)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $17m+11 = k$ où $k \in \{0; 1; 2; \ldots; 11\}$ (le cas $k=0$ correspond au cas $D = A$ déjà comptabilisé dans la situation précédente, le cas $k = 11$ correspond au cas $m = 0$).

   Les valeurs de m donnant un point D à coordonnées entières sont donc les valeurs de l'ensemble :

$$\left\{\frac{-11}{1}; \frac{-11}{2}; \ldots; \frac{-11}{17}; \frac{1-11}{17}; \frac{2-11}{17}; \ldots; \frac{11-11}{17}\right\}$$

2. La conjecture attendue est la formule de Pick :

$$\text{Aire}\,(\mathscr{P}) = n_i + \frac{1}{2}\, n_b - 1$$

   Avec Xcas :

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Xcas

```
saisir(m):;
n_i:=0:;  /* n_i : nb de points intérieurs */
n_b:=0:;  /* n_b : nb de points du bord */
t:=false:;  /* t=false si D "non entier", true si D "entier" */
pour k de 1 jusque 17 faire
si m==-11/k alors t:=true;break;fsi;
fpour:;
si t==false alors
pour k de 1 jusque 11 faire
si m==(k-11)/17 alors t:=true;break;fsi;
fpour;
fsi:;
si t==false alors afficher("valeur de m non valide");fsi:;
si t== true alors
/* on compte les points entiers strictement intérieurs : */
pour x de 1 jusque 17-1 faire
pour y de 1 jusque 11-1 faire
si y<m*x+11 alors n_i:=n_i+1;fsi;
fpour;fpour;
/* on compte les points entiers du bord inférieur : */
pour x de 0 jusque 17 faire
si 0<=m*x+11 alors n_b:=n_b+1;fsi;
fpour;
/* on compte les points entiers du bord supérieur : */
pour x de 0 jusque 17 faire
si 11<=m*x+11 alors n_b:=n_b+1;fsi;
fpour;
/* on compte les points entiers du bord gauche :  */
pour y de 1 jusque 11-1 faire
si y<=m*0+11 alors n_b:=n_b+1;fsi;
fpour;
/* on compte les points entiers du bord droit : */
pour y de 1 jusque 11-1 faire
si y<=m*17+11 alors n_b:=n_b+1;fsi;
fpour;
/* on compte les points entiers de la droite strictement intérieurs au rectangle
    : */
pour x de 1 jusque 17-1 faire
y:=m*x+11;
si floor(y)==y et y>0 et y<11 alors n_b:=n_b+1;fsi;
fpour;
afficher(n_i);afficher(n_b);afficher(n_i+1/2*n_b-1);
fsi:;
```

La conjecture peut être suivie de la démonstration de la formule de Pick dans quelques cas particuliers : rectangles à côtés parallèles aux axes, triangles rectangles ("moitié" des rectangles précé-

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

dents) …