Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Une aire variable

Dans les programmes

Aire d'une figure élémentaire. Fonctions par morceaux. Équations de droites. Simulation. Conjecturer une formule (Pick).

1 Coupe d'un rectangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère le rectangle $OACB$ de sommets O, $A(17;0)$, $B(0;11)$, $C(17;11)$.
On note Δ_m une droite passant par B et de coefficient directeur m (où m est un réel quelconque).
On note R le point d'intersection de Δ_m avec l'axe des abscisses (pour $m \neq 0$).
On note enfin D le point défini comme suit :

– lorsque $m \geqslant 0$: $D = C$.
– lorsque $m < 0$: D est le deuxième point d'intersection de Δ_m avec l'un des bords du rectangle $OACB$.

1. Déterminer les coordonnées du point R.
2. Écrire l'algorithme suivant pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	les coordonnées du point D et affichage du point dans un repère

3. On note $\mathscr{P}$ le polygone se trouvant sous la droite Δ_m et délimité par les côtés du rectangle $OACB$.
Écrire les algorithmes suivants pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	un dessin du polygone $\mathscr{P}$

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	l'aire du polygone $\mathscr{P}$

2 Tirages au hasard

Écrire l'algorithme suivant sur machine :

Entrées : un réel m, un entier $n > 0$
début
  répéter n **fois**
    Tirer au hasard dans $[0;17]$ un réel x
    Tirer au hasard dans $[0;11]$ un réel y
    Tester si le point $M(x;y)$ est à l'intérieur de $\mathscr{P}$
    Afficher éventuellement le point avec des couleurs différentes suivant qu'il est ou qu'il n'est pas dans le polygone $\mathscr{P}$
fin
Sortie : Affichage du produit $17 \times 11 \times \frac{\text{Nombre de points } M \text{ dans } \mathscr{P}}{n}$

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Quel constat fait-on pour de grandes valeurs de n ?

3 Des points à coordonnées entières

1. Quelles sont les valeurs de m telles que le point D soit à coordonnées entières ?
2. Écrire sur machine l'algorithme suivant :

   Entrées : un réel m tel que D soit à coordonnées entières
   début
   Compter le nombre n_i de points à coordonnées entières qui sont à l'intérieur strictement du polygone $\mathscr{P}$
   Compter le nombre n_b de points à coordonnées entières qui se trouvent sur un côté du polygone $\mathscr{P}$
   fin
   Sortie : Affichage de n_i et n_b

   Après observation de résultats, vous chercherez à émettre une conjecture sur une formule liant l'aire de $\mathscr{P}$ et les valeurs de n_i et n_b.

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Éléments de réponses – CALCULATRICES TI

1 Coupe d'un rectangle

Les coordonnées du point R : $\left(\frac{-11}{m};0\right)$.

Calcul des coordonnées du point D :

PROGRAM : P1
Prompt M If $M \geqslant 0$ Then $17 \longrightarrow A$ $11 \longrightarrow B$ Else If $-11/M \leqslant 17$ Then $-11/M \longrightarrow A$ $0 \longrightarrow B$ Else $17 \longrightarrow A$ $17*M+11 \longrightarrow B$ End End Disp A,B Pt-On(A,B)

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Représentation du polygone $\mathscr{P}$:

PROGRAM : P2
ClrDraw
Prompt M
If $M \geqslant 0$
Then
$17 \longrightarrow A$
$11 \longrightarrow B$
Line(0,0,17,0)
Line(17,0,17,11)
Else
If $-11/M \leqslant 17$
Then
$-11/M \longrightarrow A$
$0 \longrightarrow B$
Line(0,0,A,B)
Else
$17 \longrightarrow A$
$17 * M + 11 \longrightarrow B$
Line(0,0,17,0)
Line(17,0,A,B)
End
End
Line(0,11,A,B)

Le calcul de l'aire du polygone $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{A}(m) = \begin{cases} 17 \times 11 & \text{pour } m \in [0, +\infty[\\ \frac{17}{2} \times (22 + 17m) & \text{pour } m \in \left]\frac{-11}{17}, 0\right[\\ \frac{-11^2}{2m} & \text{pour } m \in \left]-\infty; \frac{-11}{17}\right] \end{cases}$$

PROGRAM : P3
Prompt M
If $M \geqslant 0$
Then
Disp $17 * 11$
Else
If ($M < 0$ and $M > -11/17$)
Then
Disp $17/2 * (22 + 17 * M)$
Else
Disp $-11^2/(2 * M)$
End
End

2 Tirages au hasard

Algorithme de tirages au hasard :

PROGRAM : P4
Prompt N Prompt M $0 \longrightarrow C$ For(K,1,N) $17 * \text{rand} \longrightarrow A$ $11 * \text{rand} \longrightarrow B$ If $B \leqslant M * A + 11$ Then $C + 1 \longrightarrow C$ End End Disp $17 * 11 * C / N$

En prenant n "assez grand", les valeurs obtenues sont très proches de l'aire de $\mathscr{P}$.
On peut aussi écrire une version avec affichage des points intérieurs au polygone :

PROGRAM : P5
ClrDraw Prompt N Prompt M $0 \longrightarrow C$ For(K,1,N) $17 * \text{rand} \longrightarrow A$ $11 * \text{rand} \longrightarrow B$ If $B \leqslant M * A + 11$ Then $C + 1 \longrightarrow C$ Pt-On(A,B) End End Disp $17 * 11 * C / N$

3 Des points à coordonnées entières

1. CAS 1- Le point D est un point du segment $[OA]$.
   Le point D a dans ce cas pour coordonnées $\left(\frac{-11}{m},0\right)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $\frac{-11}{m} = j$ avec $j \in \{1;2;\dots;17\}$. Les valeurs possibles de m sont donc les valeurs de l'ensemble $\left\{\frac{-11}{1};\frac{-11}{2};\dots;\frac{-11}{17}\right\}$.

   CAS 2- Le point D est un point du segment $[AB]$.
   Le point D a dans ce cas pour coordonnées $(17;17m+11)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $17m+11 = k$ où $k \in \{0;1;2;\dots;11\}$ (le cas $k = 0$ correspond au cas $D = A$ déjà comptabilisé dans la situation précédente, le cas $k = 11$ correspond au cas $m = 0$).

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

Les valeurs de m donnant un point D à coordonnées entières sont donc les valeurs de l'ensemble :

$$\left\{\frac{-11}{1};\frac{-11}{2};\ldots;\frac{-11}{17};\frac{1-11}{17};\frac{2-11}{17};\ldots;\frac{11-11}{17}\right\}$$

2. La conjecture attendue est la formule de Pick :

$$\text{Aire}\,(\mathscr{P}) = n_i + \frac{1}{2}\,n_b - 1$$

Avec une ti 84 :

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

```
PROGRAM : PICK
Prompt M
0 ⟶ I
0 ⟶ B
0 ⟶ T
For(K,1,17)
If M = −11/K
Then
1 ⟶ T
End
End
If T = 0
Then
For(K,1,11)
If M = (K − 11)/17
Then
1 ⟶ T
End
End
End
```

```
If T = 0
Then
Disp "D non entier"
stop
end
For(X,1,16)
For(Y,1,10)
If Y < M ∗ X + 11
Then
I + 1 ⟶ I
End
End
End
For(X,0,17)
If (M ∗ X + 11 ⩾ 0)
Then B + 1 ⟶ B
End
End
For(X,0,17)
If (M ∗ X + 11 ⩾ 11)
Then
B + 1 ⟶ B
End
End
For(Y,1,10)
If (Y ⩽ 11)
Then
B + 1 ⟶ B
End
End
For(Y,1,10)
If (Y ⩽ 17 ∗ M + 11)
Then
B + 1 ⟶ B
End
End
For(X,1,16)
M ∗ X + 11 ⟶ Y
If int(Y)=Y and Y>0 and Y<11
Then
B + 1 ⟶ B
End
End
Disp I
Disp B
Disp I+1/2∗B−1
```

Ce document est sous licence *Creative Commons*
Paternité - Pas d'utilisation commerciale - Partage des conditions initiales à l'identique

La conjecture peut être suivie de la démonstration de la formule de Pick dans quelques cas particuliers : rectangles à côtés parallèles aux axes, triangles rectangles ("moitié" des rectangles précédents) ...