Académie de Lyon

TraAM 2013-2014 : Des problèmes ouverts avec les TICE

Séquence "Triangle élastique"

Groupe académique IREM – UPO

Dominique Bernard
Cécile Bombrun-Nivon
Jean-Louis Bonnafet
Françoise Cavanne
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

TITRE DE L'ACTIVITE : TRIANGLES ELASTIQUES

Présentation : activité inspirée d'une activité existante « Elastique » de l'académie de Bordeaux 2007.

Public visé : élèves de seconde

Objectifs : Apprendre à traiter un même problème sous trois aspects : expérimental, géométrique et algébrique. Conjecturer l'existence de triangles particuliers avec geoGebra, construire les triangles solutions avec geoGebra, construire une démonstration conduisant à la résolution d'équations du premier ou second degré, d'équations avec radicaux, mettre en œuvre différentes stratégies de résolution. Confronter les solutions aux résultats trouvés avec geoGebra.

Pré-requis en mathématiques :

Ce qui a été traité en amont : géométrie plane, généralités sur les fonctions, fonctions affines et résolution d'équations du premier degré ou d'équations produits, exemples d'utilisation de Xcas, vecteurs sans les coordonnées.

Fiche élève

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit A (- 4 ; 0) et B(0 ; 2). Un point mobile C se déplace sur une droite parallèle à l'axe des abscisses ; son ordonnée est donc constante et son abscisse est notée *c*.

Première partie : **dans cette partie, l'ordonnée de C est constante égale à 6.**
Réaliser une figure si possible avec un logiciel de géométrie dynamique avec C point mobile.
Question 1 : Existe-t-il une ou plusieurs positions du point C telles que :

a. ABC soit isocèle ? Si oui, pour chaque point C noter son abscisse.
b. ABC soit équilatéral ? Si oui, pour chaque point C noter son abscisse.
c. ABC soit rectangle ? Si oui, pour chaque point C noter son abscisse.
d. L'aire du triangle ABC soit minimale ? Si oui, pour chaque point C noter son abscisse.
e. Le périmètre du triangle ABC soit minimal ? Si oui, noter son abscisse.

Question 2 : Dans chacun des cas rencontrés dans la question 1, proposer et réaliser une construction géométrique du point C.

Question 3 : Dans chacun des cas rencontrés dans la question 1, proposer une mise en équation permettant de calculer l'abscisse des éventuels points C solutions.

Deuxième partie :
reprendre les questions des trois parties précédentes avec une ordonnée de C égale à 3.

Même si la recherche n'aboutit pas, vous devez faire apparaître sur votre copie les traces de votre recherche. Il est possible de réaliser ce travail en groupe de deux élèves.

Scenario : Une heure de TD en salle informatique en demi-classes, pour une prise en main du logiciel et une présentation du travail attendu puis poursuite du travail en devoir maison (pendant des vacances). Dans un premier temps, seule le première partie (C sur la droite d 'équation y = 6) a été corrigée avec possibilité de reprendre, toujours en devoir maison, la seconde partie (C sur la droite d'équation y = 3) avant correction complète.

Bilan

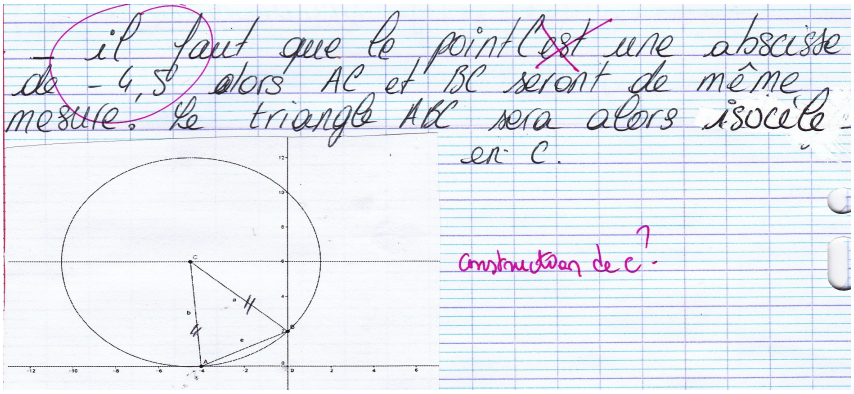
Le travail a été donné avant des vacances et les élèves ont consacré beaucoup de temps à ce travail. Ils se sont bien investi dans la première partie du travail qui leur permet de visualiser les triangles solutions, d'approfondir leur connaissance du logiciel.

La partie investigations n'a pas posé de problème en général les élèves ont trouvé les éventuelles réponses, parfois incomplètement.

A signaler la difficulté posée par la question « aire minimale » ; ici l'aire peut être égale à 0 ce qui a troublé deux élèves :

d) L'aire du triangle ABC soit minimale ?
Il existe plusieurs positions pour que l'aire du triangle ABC soit minimale .
Quand l'aire est de 0, l'abscisse du point C est 8.
Mais l'aire la plus minimale est 0,11 (cm2) dont l'abscisse du point C est 8,11.
Quand l'aire est de 1, l'abscisse du point C est 9.
De plus quand l'aire est de 10 (cm2), l'abscisse du point C est -2.

La partie construction a souvent été bâclée ou oubliée...Il y a parfois confusion entre démarche d'investigation, le fait de trouver un point solution et la construction géométrique de points solutions faisant appel aux connaissances du collège.



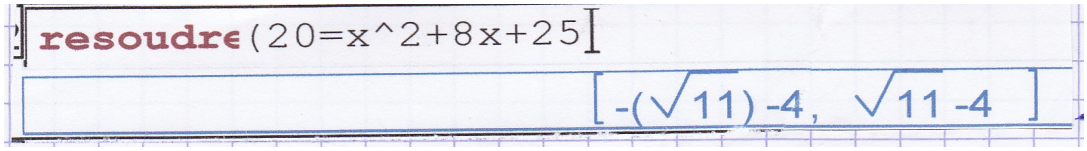
La partie résolution d'équations a été bien traitée pour les équations du premier degré. Certaines équations du second degré ont posé problème lorsque les élèves ne pouvaient factoriser : certains ont utilisé Xcas ou sont passés par la forme canonique.

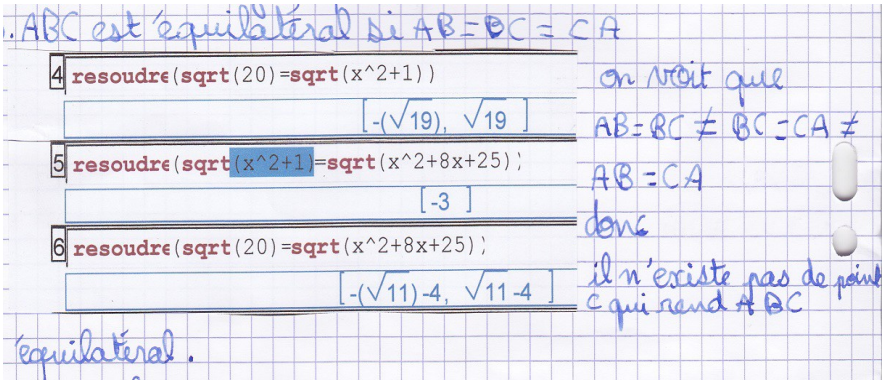
Exemple d'erreurs

ABC isocèle en B ssi $AB^2 = BC^2$ ssi $20 = c^2 + 1$ ssi $c^2 - 19 = 0$ ssi $c^2 = 19$ ssi $c=\sqrt{19}$ ce qui équivaut à $c = -4.36$

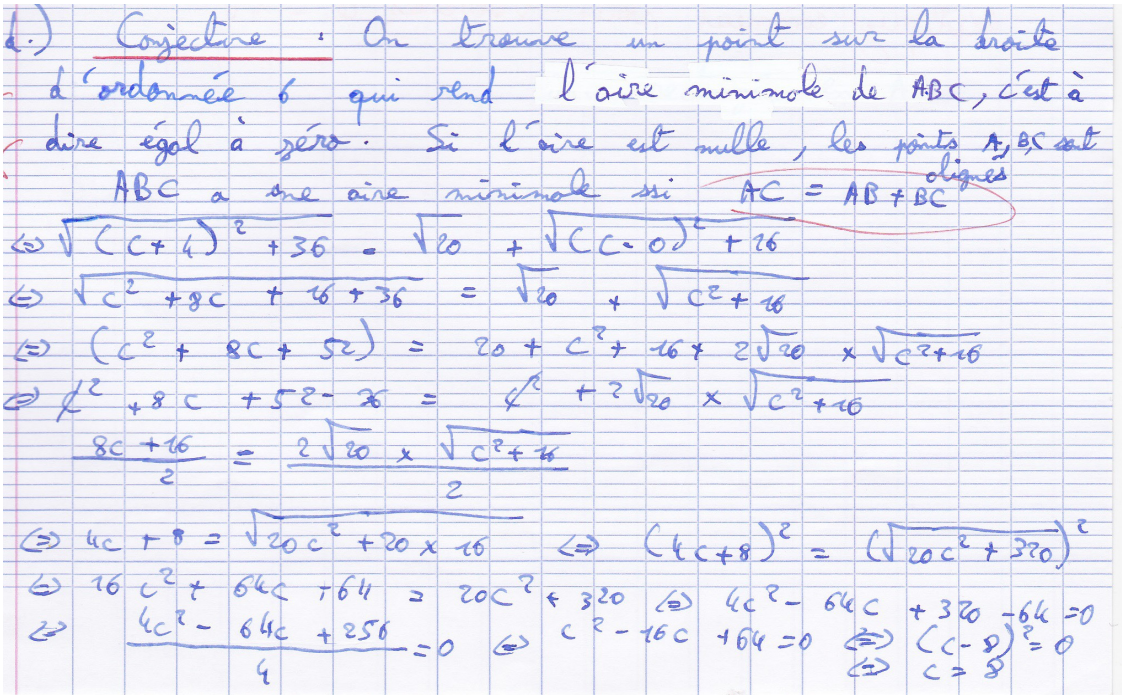
ABC isocèle en A ssi $AB^2 = AC^2$ ssi $(c+4)^2 + 9 = 20$ ssi $(c+4)^2-11 = 0$ ssi $(c+4-\sqrt{11})(c+4+\sqrt{11}) = 0$ donc $c = -7.316$ ou $c= -0.67$

Utilisations de Xcas :

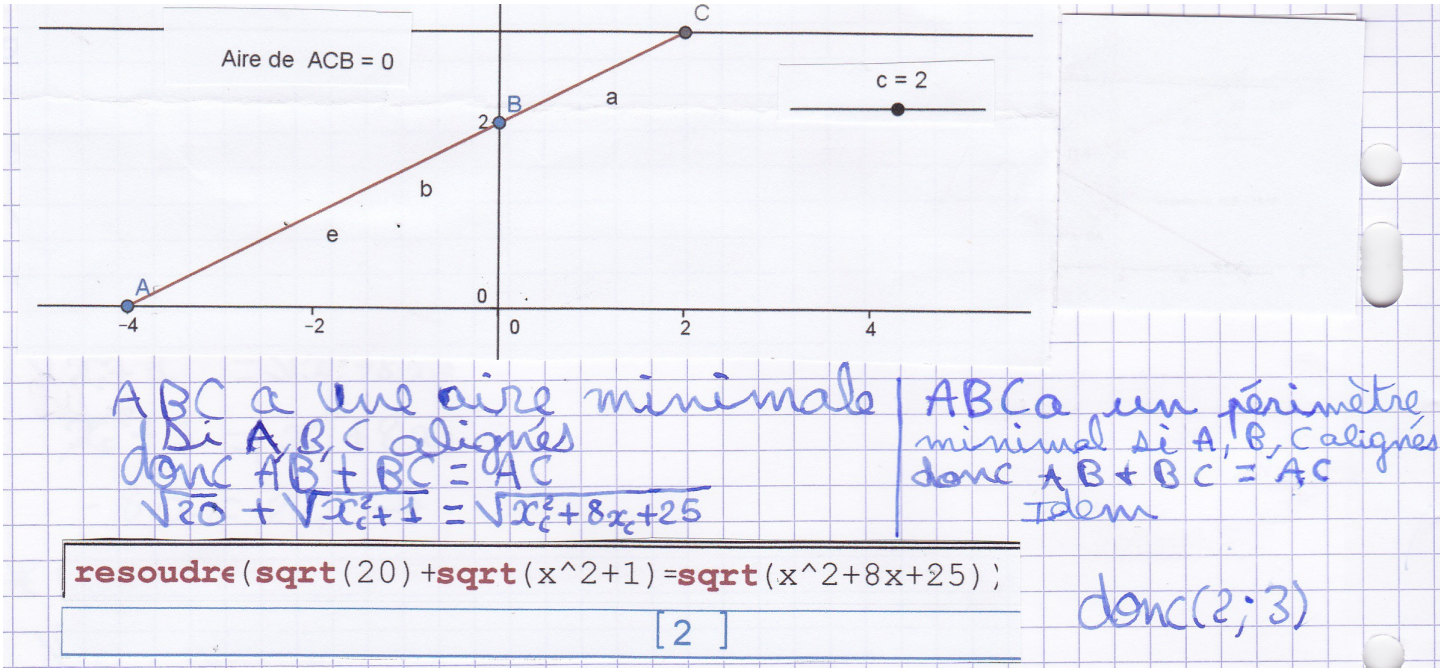




Deux questions sont particulièrement délicates. La question de l'aire minimale se traduit assez facilement par l'alignement des points A, B et C dans cet ordre (l'ordre n'est pas justifié en général) et les élèves utilisent alors les distances pour traduire l'alignement par AC = AB + BC ce qui conduit à une équation avec des radicaux... Beaucoup renoncent, quelques uns utilisent Xcas, quelques rares transforment judicieusement l'équation par élévations successives au carré sans justifier dans tous les cas les équivalences ou contrôler les solutions.



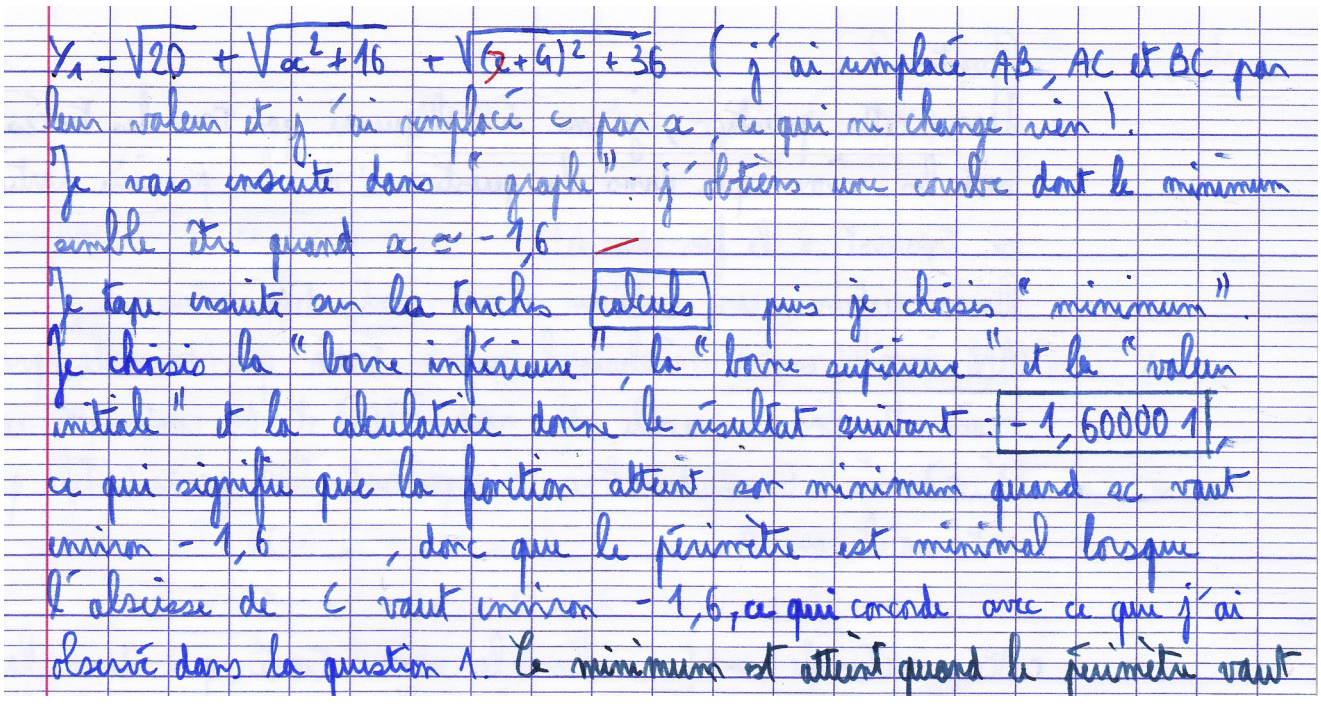
Il peut y avoir un raisonnement correct et une bonne utilisation de Xcas dans le cas de l'aire minimale mais un raisonnement faux pour le périmètre minimal...



A noter qu'aucun élève n'a utilisé une équation de la droite (AB), ni la colinéarité des vecteurs puisque les coordonnées de vecteurs n'avaient pas été étudiées.

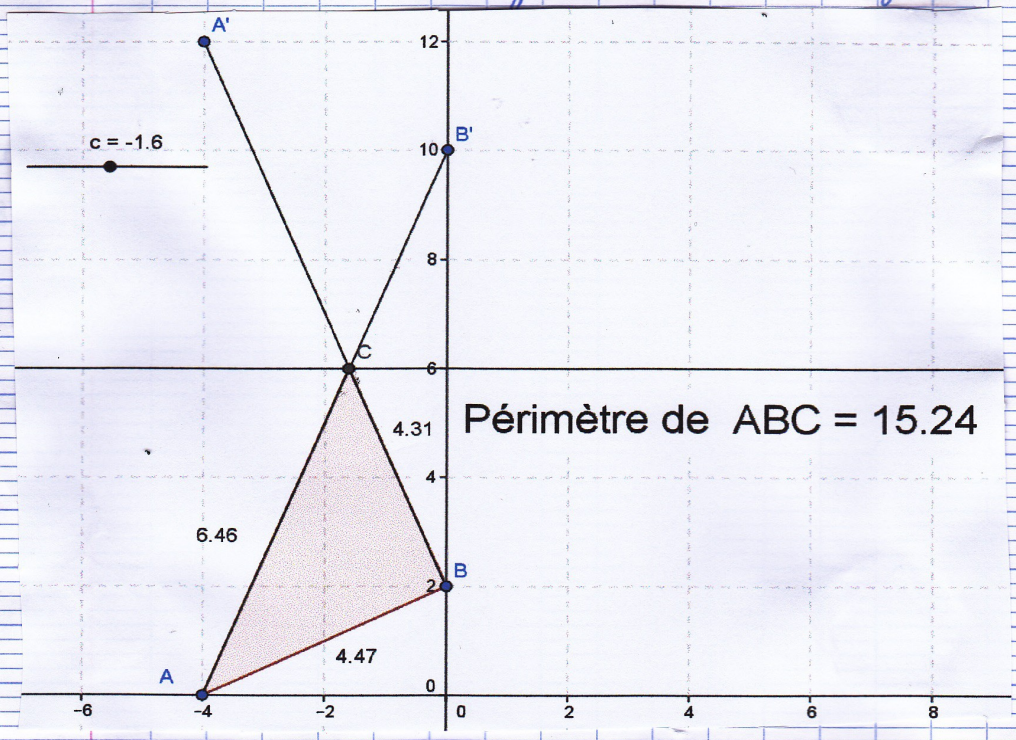
La question du <u>périmètre minimal</u> n'a été traitée que par quelques élèves, les uns par étude des variations de la fonction qui calcule ce périmètre, les autres utilisant des considérations géométriques.

Utilisation de la calculatrice :



Démarche intuitive, justification insuffisante :

Pour trouver l'abscisse du point C telle que le périmètre du triangle ABC soit minimal. Traçons les points symétriques de A et de B qu'on appellera A' et B' par rapport à la (d). On trace le segment AB' et le segment A'B.



On observe qu'il y a un point à l'intersection de la droite (d) et des segments AB' et BA'. Il correspond à la position du point C. Le périmètre de ABC est donc minimal lorsque C a pour abscisse -1,6.

Bonne piste en utilisant une configuration de Thalès mais ds difficultés n'ayant pas à disposition l'outil vectorielle

Soit A' et B' les symétriques par rapport à (EC) des points A et B.
On a A'(-4;12) et B'(0;10).
(CE) et l'axe des abscisses sont parallèles.
Sachant que pour aller d'un point à un autre le chemin le plus court est la ligne droite.
On obtient le triangle AOB' et le triangle EB'C.
On peut appliquer le théorème de Thalès.

$\frac{OB'}{OA} = \frac{EB'}{EC}$ $EC = \frac{EB' \times OA}{OB'} = \frac{4 \times (-4)}{10} = \frac{-16}{10} = -1,6.$

Compétences mathématiques travaillées :

Toutes les compétences mathématiques du lycée sont travaillées dans ce problème : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Ce qui est à faire après :

Reprendre certains calculs en décomposant les différentes étapes avec epsilonwriter. Utiliser fonctions affines ou équations de droites ou coordonnées de vecteurs pour traduire l'alignement des points A, B et C .

Réinvestir en devoir surveillé.

Exercice donné en ds

Dans un repère orthonormé, placer les points A(-2 ;5) et B(5,2). Un point C est mobile sur l'axe des abscisses et a pour abscisse x.

1. Le triangle ABC peut-il être isocèle ? Justifier par une construction géométrique.
2. Déterminer x pour que le triangle ABC soit isocèle.
3. Le triangle ABC peut-il être rectangle en C? Justifier par une construction géométrique.
4. Déterminer x pour que le triangle ABC soit rectangle en C.