Parabole et rapport d'aires - niveau 1

Fiche d'identité

- **Niveau** : seconde
- **Logiciel** : géométrie dynamique
- **Type d'utilisation** : TP en salle info suivie d'une démonstration papier (en classe ou dm)
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, permet la conjecture, permet l'approche du problème dans une situation plus générale qu'une démonstration à ce niveau ne l'autorise.
- **Compétences travaillées** :
  - aire d'un triangle, intersection de droite, coordonnées du milieu, droites remarquables ;
  - représentation graphique d'une fonction, appartenance d'un point à une courbe, fonctions de référence, test de la résistance d'une conjecture.
- **Variante possible** : la démonstration pourrait être abordée sous sa forme la plus générale avec un logiciel de calcul formel avant le dm.

Énoncé - version 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On définit la fonction f par $f(x) = x^2$ et on note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans le repère fixé ($\mathcal{P}$ est une parabole).
On note A et B deux points de la parabole $\mathcal{P}$. On note a et b les abscisses respectives des points A et B.
On note I le milieu du segment $[AB]$, J le point de la parabole $\mathcal{P}$ ayant même abscisse que I et K le symétrique de I par rapport à J .

Expérimentation

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Faire une conjecture sur le rapport des aires des triangles ABJ et ABK.

Démonstration

3. On se place dans le cas particulier où la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses et où $a > 0$). Démontrer la conjecture dans ce cas.

Énoncé - version 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient D et E deux points de la parabole $\mathcal{P}$, représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note d l'abscisse de D et e l'abscisse de E.
On note I le milieu de $[DE]$, J le point de la parabole $\mathcal{P}$ ayant même abscisse que I , K le milieu de $[IE]$ et L le point de $\mathcal{P}$ ayant même abscisse que K. On note M le point d'intersection des droites (KL) et (EJ).

Expérimentation

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Faire une conjecture sur le rapport des aires des triangles EML et MLJ.
3. Quelle conjecture peut-on en déduire sur le rôle de la droite (LM) dans le triangle ELJ ? Comment pouvez-vous utiliser le logiciel pour tester cette conjecture ?
4. Faire une conjecture sur le rapport des aires des triangles EML et EMK.
5. Quelle conjecture peut-on en déduire quant à la position du point M sur le segment $[KL]$? Comment pouvez-vous utiliser le logiciel pour tester cette conjecture ?

Démonstration On se place désormais dans le cas particulier suivant :
- la fonction f est définie par $f(x) = x^2$;
- la droite (DE) est parallèle à l'axe des abscisses.

6. Démontrer les conjectures faites dans les questions précédentes.

Parabole et rapport d'aires - niveau 2

Fiche d'identité

- **Niveau** : première, terminale
- **Logiciel** : géométrie dynamique
- **Type d'utilisation** : TP en salle info suivie d'une démonstration papier (en classe ou)
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, permet la conjecture.
- **Compétences travaillées** :
  - tangente à une courbe, intersection de droite, aire d'un triangle, distance point-droite ;
  - représentation graphique d'une fonction, appartenance d'un point à une courbe.
- **Variante possible** : la démonstration pourrait être abordée sous sa forme la plus générale avec un logiciel de calcul formel avant le dm.

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient A et B deux points de la parabole $\mathcal{P}$ représentant, dans le repère donné, la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
On note a et b les abscisses respectives des points A et B. On note T_A et T_B les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ aux points A et B. On note K le point d'intersection des tangentes T_A et T_B. On note J le point de la parabole $\mathcal{P}$ ayant même abscisse que K.
Expérimentation

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Faire une conjecture sur l'expression des coordonnées de K en fonction de a et b.
3. Faire une conjecture sur le rapport des aires des triangles ABJ et ABK.

Démonstration-DM

4. Soit OMN un triangle dont un sommet est le point O origine du repère. Démontrer que l'aire $\mathcal{S}$ du triangle OMN est donnée par la formule : $\mathcal{S} = \frac{1}{2}[x_B.y_A - x_A.y_B]$.
5. En déduire que l'aire $\mathcal{S}$ d'un triangle CDE est donnée par : $\mathcal{S} = \frac{1}{2}|(x_B-x_C)(y_A-y_C)-(x_A-x_C)(y_B-y_C)|$.
6. Démontrer la conjecture établie.

Parabole et tangente - 1

Fiche d'identité

- **Niveau** : première ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle info suivie d'une démonstration papier (en classe ou dm) ;
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer ;
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, facilite la conjecture.
- **Compétences travaillées** : tangente à une courbe, appartenance d'un point à une courbe, lien tangente et dérivée.

Énoncé - version 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction trinôme du seconde degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ la parabole associée à la fonction f. Soient P et Q deux points de la parabole $\mathcal{P}$. On note I le milieu de $[PQ]$ et R le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par I et parallèle à l'axe des ordonnées.
Expérimentation

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure.
2. Émettre, à l'aide du logiciel, une conjecture à propos de la tangente à $\mathcal{P}$ en R.

Démonstration-DM

3. Démontrer la conjecture faite.

Énoncé - version 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction trinôme du seconde degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ la parabole associée à la fonction f. Soient P et Q deux points de la parabole $\mathcal{P}$.

Expérimentation

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure.
2. Émettre, à l'aide du logiciel, une conjecture sur la position du point R de la parabole tel que la tangente à P en R soit parallèle à (PQ).

Démonstration-DM

3. Démontrer la conjecture faite.

Énoncé - version 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction trinôme du seconde degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ la parabole associée à la fonction f. Soient P et Q deux points de la parabole $\mathcal{P}$. On nomme T_P et T_Q les tangentes à $\mathcal{P}$ en P et Q. On nomme S le point d'intersection de T_P et T_Q.

Expérimentation

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure.
2. Émettre, à l'aide du logiciel, une conjecture à propos de l'abscisse du point S.
3. On note R le point de la parabole $\mathcal{P}$ ayan t même abscisse que S. Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{P}$ en R ?

Démonstration-DM

4. Démontrer les conjectures faites.

Parabole et tangente - 2

Fiche d'identité

- **Niveau** : première ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle informatique.
- **Objectifs** : Conjecturer.
- **Apport des TICE** : Expérimentation et conjecture
- **Compétences travaillées** : Coordonnées de points sur une courbe - équation de droite - Projection orthogonale - équation de tangente.

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction carrée. Le point A est un point de $\mathcal{P}$, d'abscisse non nulle. On définit le point L projeté orthogonal du point A sur l'axe des ordonnées et le point B, symétrique du point L par rapport au point O.

Expérimentation

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure.
2. Émettre, à l'aide du logiciel, une conjecture à propos de la droite (BA).

Soit N le point de l'axe des ordonnées ayant A pour projeté othogonal sur la droite (AB).

3. Quelle conjecture peut-on faire sur le segment $[LN]$ lorsque A parcourt la parabole $\mathcal{P}$ privée de l'origine ?

Varignon

Fiche d'identité

- **Niveau** : première ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle informatique.
- **Objectifs** : Conjecturer.
- **Apport des TICE** : Expérimentation et conjecture
- **Compétences travaillées** : Notion de lieu géométrique - optimisation - fonction
- **Ouverture** : Démonstration des conjecture en DM.

Énoncé

On note $ABCD$ est un rectangle tel que $BC = 5$ et $AB = 3$. On désigne par M un point quelconque du segment $[AB]$. On note alors N, P, Q les points situés respectivement sur $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$. On cherche à savoir s'il existe une position du point M sur le segment $[AB]$ qui minimise l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

Expérimentation

1. (a) Construire le rectangle $ABCD$.
   (b) Définir le point M libre sur $[AB]$ puis construire les points N, P , Q.
   (c) A l'aide du logiciel, dire si le problème semble avoir une solution.
2. On impose maintenant $AB = 6$.
   (a) Que vaut dans ce cas la longueur AD ?
   (b) On veut définir le point W de coordonnées (longueur du segment $[AM]$; Aire du quadrilatère $MNPQ$). Comment définir ce point W dans la figure précédemment construite (sans modification) ?
   (c) Tracer le lieu géométrique du point W obtenu lorsque M parcourt le segment $[AB]$.
3. On admet que la courbe obtenue pour le lieu du point W est représentative d'une fonction f dont une expression algébrique est de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
   (a) Que désigne x dans la situation qui nous intéresse ?
   (b) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f.
   (c) Tracer la courbe de f pour des valeurs de a, α, β prises au hasard puis faire varier ces valeurs pour que les deux courbes semblent se superposer.
   (d) Pour quelle position du point M l'aire du quadrilatère $MNPQ$ semble-t-elle minimale ?

Thalès

Fiche d'identité

- **Niveau** : seconde ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en classe.
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer.
- **Apport des TICE** : construction d'un lieu géométrique
- **Compétences travaillées** : triangles semblables, parabole

Énoncé

Expérimentation

1. Dans une feuille geogebra, définir les points $O\,(0; 0)$, $I\,(1; 0)$, $A(x; 0)$ et $C\,(1; x(A))$.
2. Définir ensuite le point B point d'intersection de la droite (OC) et de la perpendiculaire en A à l'axe des abscisses.

3. Quel semble être le lieu des points B lorsque A parcourt l'axe des abscisses ?

Démonstration

1. Démontrer que les triangles OAB et OIC sont des triangles semblables.
2. Déterminer la longueur AB en fonction de l'abscisse x_A du point A.
3. Justifier que le lieu des points B est la parabole d'équation $y = x^2$.

Parabole et tangentes (première)

Fiche d'identité

- **Niveau** : Première ;
- **Logiciel** : Logiciel de géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle informatique.
- **Objectifs** : Conjecturer.
- **Apport des TICE** :Expérimentation et conjecture
- **Compétences travaillées** : Coordonnées de points sur une courbe - équation de droite - Projection orthogonale - équation de tangente.

Énoncé

Première conjecture

1. Dans une feuille geogebra, tracer la courbe représentative P de la fonction carrée. Placer un point mobile A sur la parabole, d'abscisse non nulle .
2. Placer le point L projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées puis le symétrique B de L par rapport àă l'origine O du repère.
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la droite (BA) ?

Deuxième conjecture

Soit N le point de l'axe des ordonnées ayant A pour projeté othogonal sur la droite (AB). Quelle conjecture peut-on faire sur le segment $[LN]$ lorsque A parcourt la parabole P privée de l'origine ?

Trinôme

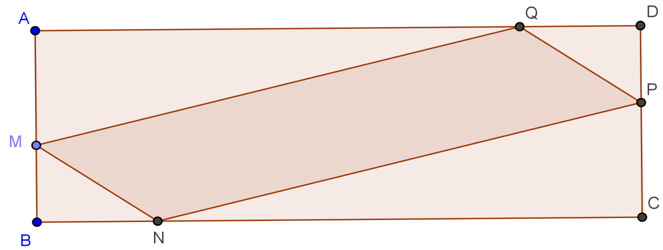
Fiche d'identité

- Niveau : Première
- Logiciel : Logiciel de géométrie dynamique (Géogébra)
- Type d'utilisation : TP en salle informatique
- Objectif : Conjecturer
- Apport des TICE : Expérimentation et conjecture
- Compétences travaillées : Notion de lieu géométrique - optimisation -fonction
- Ouverture : Démonstration des conjecture en DM

Énoncé

$ABCD$ est un rectangle tel que $BC = \frac{5}{3}AB$. On désigne par M un point quelconque du segment $[AB]$. On note alors N, P, Q les points situés respectivement sur $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ tels que :

$$AM = BN = CP = DQ$$



L'aire du quadrilatère $MNPQ$ varie lorsque la position du point M varie sur le segment $[AB]$. On cherche àă savoir s'il existe une position du point M sur le segment $[AB]$ telle que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit pour cette position inférieure àă toutes les aires du quadrilatère $MNPQ$ obtenues en faisant prendre àă M toutes les positions sur le segment $[AB]$.

Expérimentation

1. (a) Construire un rectangle $ABCD$ (A et B étant deux points libres) tel que $BC = \frac{5}{3}\,AB$.
   (b) Définir un point M libre sur $[AB]$ puis définir les points N ; P ; Q.
   (c) Faire alors une première conjecture.
2. On impose maintenant $AB = 6$.
   (a) Que vaut dans ce cas la longueur AD ?
   (b) On veut définir le point W (longueur du segment [AM] ; Aire du quadrilatère MNPQ). Comment définir ce point W dans la figure précédemment construite (sans modification) ?
   (c) Tracer le lieu géométrique du point W obtenu lorsque M parcourt le segment $[AB]$.
3. On admet que la courbe obtenue pour le lieu du point W est représentative d'une fonction f dont une expression algébrique est de la forme $x \longmapsto a\ (x-\alpha)^2 + \beta$.
   (a) Que désigne x dans la situation qui nous intéresse ?
   (b) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f.
   (c) Tracer la courbe de f pour des valeurs de a, α, β prises au hasard puis faire varier les valeurs de a, α et β pour que les deux courbes semblent se superposer.
   (d) Pour quelle position du point M l'aire du quadrilatère $MNPQ$ semble-t-elle minimale ?