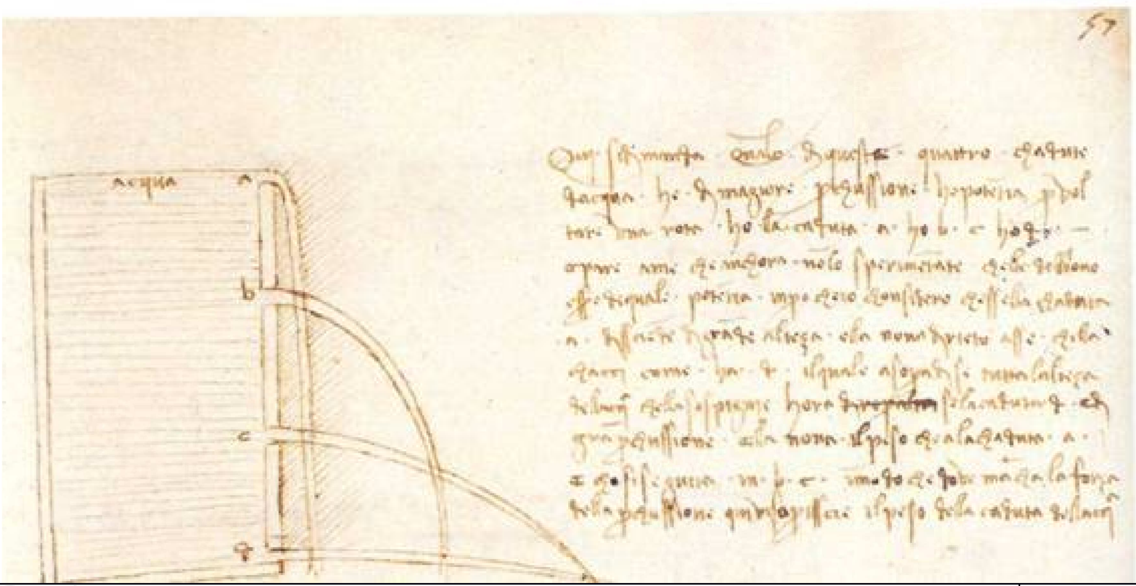
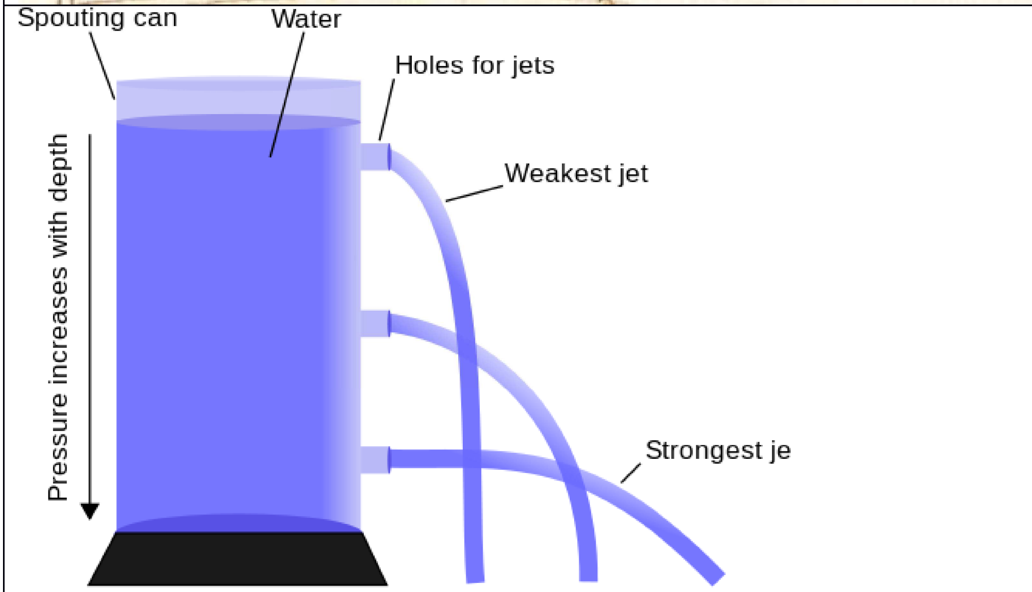
Récipient percé : quel jet ira le plus loin ?



LÉONARD DE VINCI,

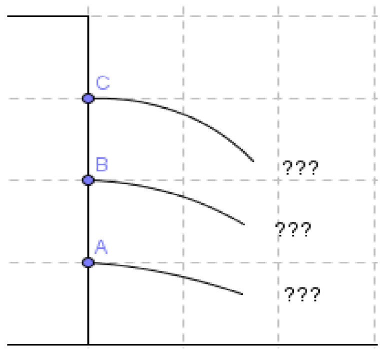
Étude de la chute d'eau depuis un récipient percé à différentes hauteurs



A diagram of the spouting can experiment. The pressure increases with depth.
http://en.wikipedia.org/wiki/Spouting_can

Notre problème :

Quel jet ira le plus loin ?



1. Une cuve cylindrique verticale de $4m$ de hauteur est remplie avec 8042,5 litres d'eau. Quel est son diamètre ?

2. On perce, sur ce cylindre, trois trous identiques parfaitement horizontaux A, B et C, de même diamètre assez « petit », situés sur une même verticale respectivement à $1m$, $2m$ et $3m$ du sol. On débouche chaque trou à l'instant $t = 0$ et l'on s'interroge sur les positions relatives des trajectoires des gouttes d'eau. D'après les documents fournis, les expériences réalisées, les films et photos pris par les élèves de la classe, quel jet aura la plus grande portée sur le plan de base de la cuve ? Quelle est votre conjecture ?

3. a) D'après la formule de Torricelli (voir document joint), la vitesse de sortie des jets d'eau (horizontale et mesurée en ms^{-1}) est donnée par la formule $V=\sqrt{2gh}$ où h est la hauteur d'eau au-dessus du trou maintenue constante (mesurée en mètres) et g est la constante d'accélération de la pesanteur égale à $9{,}81\ N.kg^{-1}$. Pour quel trou cette vitesse est-elle la plus grande ?

   b) (http://www.chaos-math.org/fr/chaos-iii-un-peu-de-m%C3%A9canique)

On admet qu'en l'absence de force autre que le poids cette vitesse horizontale reste constante. Au bout d'un temps *t* exprimé en seconde, quelle est la distance horizontale parcourue par une goutte d'eau ?

4. On admet pour la suite que la trajectoire théorique des premières gouttes est donnée par

$x_H(t)=\sqrt{2gh}\times t$ et $y_H(t)=H-\frac{1}{2}g\,t^2$ où t est le temps écoulé en secondes, x_H est la distance horizontale entre l'eau et le bord du cylindre, y_H la hauteur des gouttes d'eau, H la hauteur du trou et *h* la hauteur d'eau au-dessus du trou maintenue constante. Dans tous les cas ici, *h* = 4 – *H*. Toutes les longueurs sont exprimées en mètres.

a) Pour une valeur de *H* fixée, si t augmente, que se passe-t-il pour y_H ?
b) Si l'on débouche le trou A qui correspond à *H* = 1, calculer x_1 et y_1 au bout d'une demi-seconde.
c) Avec un tableur, calculer $x_1(t)$ et $y_1(t)$ pout *t* variant de 0 à 0,8 s avec un pas de 0.01s en se limitant

à $y \geq 0$ (pourquoi ?). Afficher le nuage de points obtenu.

d) Reprendre les questions b. et c. avec successivement *H* = 2 puis *H* = 3. Pour que le point de chute des premières gouttes soit le plus éloigné possible du cylindre, vaut-il mieux déboucher le trou A, le trou B ou le trou C ?

5. a) Tous les nuages semblent avoir la même forme ? Par quelle courbe bien connue peut-on modéliser les trajectoires des gouttes d'eau ?

b) Pour une valeur de *H* fixée, exprimer y en fonction de x . Quelle équation de courbe reconnaît-on ? c) Déterminer l'abscisse x_{Max} du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ?

6. Pour que le point de chute des premières gouttes soit le plus éloigné possible du cylindre, à quelle hauteur faut-il percer ce trou ? (on pourra étudier les variations de x_{Max}^2 en fonction de *H*).

7. http://www.dailymotion.com/video/x489mg_experience-de-la-bouteille-percee_tech?ralg=meta2-only#from=playrelon-6
8. http://www.dailymotion.com/video/x4enf6_bouteillepercee_tech