Académie de Lyon

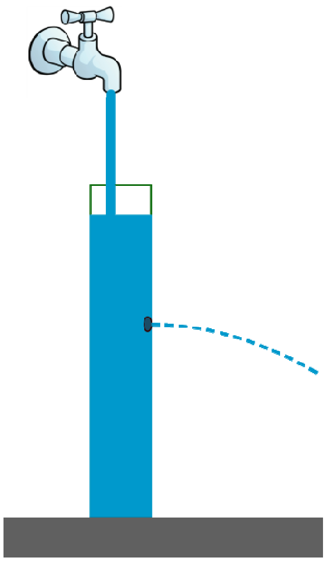
TraAM 2013-2014 : Des problèmes ouverts avec les TICE

Séquence "Cuves percées"

Groupe académique IREM – UPO

Dominique Bernard
Cécile Bombrun
Jean-Louis Bonnafet
Françoise Cavanne
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

1. Présentation de l'activité



Activité sous forme d'une question ouverte.
Public visé : Classe première
(adaptation possible en classe de seconde).

2. Objectifs de l'activité

- Développer l'esprit critique :
  A partir d'un dessin de Léonard de Vinci, d'un schéma sur Wikipedia et d'observations d'expériences, s'interroger sur le lien entre la pression et portée d'un jet d'eau.
- S'approprier la modélisation d'un phénomène physique : la pression.
- Découvrir et manipuler une fonction à deux variables $x(t)$, $y(t)$.

Compétences mises en œuvre :

Cette activité permet de mobiliser toutes les compétences listées dans le document "Les compétences mathématiques au Lycée", à savoir : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

3. Scénario de la séance

Phase 1 : Etude des trois documents (10-15 min)

- Distribution de la première page de la "fiche élèves".
  Laisser le temps aux élèves de s'approprier les documents puis leur demander de donner leur avis (à priori) sur la question.

  A disposition des élèves : - Le document de léonard de Vinci
  - L'accès à la page "Spouting Can" de wikipédia
  - Les vidéos de différentes expériences réalisées.
- Synthèse, par le professeur, des différents avis pour conduire à la conclusion qu'en l'état, on ne peut pas conclure de façon certaine, d'où la nécessité d'une modélisation de la situation.

L'objectif de cette phase est de permettre aux élèves de découvrir la situation, d'observer les résultats parfois contradictoires auxquels conduisent les différents documents, de se forger une première opinion et d'arriver à la conclusion qu'il faut modéliser pour pouvoir trancher entre les différentes hypothèses.

Phase 2 : Présentation des formules (5 min)

- Distribution de la deuxième page de la "fiche élèves".
  Présentation, par le professeur, de la première formule et réponse à la première question.
- Présentation, par le professeur, des autres formules : demander aux élèves d'expliciter le lien avec la formule précédente.

L'objectif de cette phase est de permettre aux élèves de relier les phénomènes physiques aux différentes formules et de donner un sens à ces formules.

Phase 3 : Recherche en groupes (25-30 min)

↳ Laisser les élèves chercher en autonomie, chaque groupe sera amené à faire le choix d'un outil TICE pour mettre en place une modélisation.

↳ Synthèse, menée par le professeur, des travaux des différents groupes.

L'objectif de cette phase est d'aider les élèves à s'approprier les formules, à comprendre le lien entre les différentes variables et le rôle des différents paramètres. L'objectif est aussi de donner des pistes aux élèves pour leur permettre de s'engager dans une démarche de recherche.

Phase 4 : Retour à la question initiale (Temps restant)

↳ Demander aux élèves formuler une conjecture et de la démontrer.

Travail à finir en travail à la maison.

4. Mise en œuvre en classe

Cette activité a été proposée à une classe de 1$^{\text{ère}}$ S

Ce qui a été fait avant

Concernant les contenus mathématiques

- Le chapitre « Second degré » avec l'étude de la fonction trinôme du second degré.
  En particulier, les élèves ont appris à déterminer l'équation d'une parabole passant par trois points donnés et à résoudre quelques équations en utilisant des changements de variables.
- Le chapitre « Etude de fonctions » et « Applications de la dérivation »
  En particulier, les élèves ont appris à chercher les solutions approchées d'une équation f(x) = k avec l'aide éventuelle d'algorithmes (par exemple l'algorithme de dichotomie).
- Les chapitres « Dérivation » et « Applications de la dérivation »
  En particulier, les élèves ont appris à déterminer l'équation de courbes vérifiant des conditions particulières (points de la courbe, nombres dérivés ou tangentes donnés).
- Le chapitre « Géométrie plane » qui a permis d'aborder les notions de vecteurs et de forces.
- Les élèves ont été amenés à résoudre quelques exercices utilisant des paramètres.

Concernant l'usage des TICE pour la recherche de problèmes

- *Chapitre « Second degrés »*
  TP « Re-Prise en main de Géogebra » : Définition de fonctions, tracé de courbes, utilisation de curseurs …
- *Chapitre « Etude de fonctions »*
  TP « Chercher avec méthode » : Optimisation d'une distance et recherche d'une aire à l'aide d'un logiciel de géométrie.
- *Chapitre « Géométrie plane »*
  TP « Mettre en œuvre une démarche de recherche : différentes méthodes de résolution d'un problème » : Droites et points alignés à l'aide d'un logiciel de géométrie.
- *Chapitre « Dérivation »*
  TP « Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour une résolution de problème » : Raccordement dans le tracé de lignes TGV.

- *Chapitre « Applications de la dérivation »*
  TP « Utilisation conjointe d'un logiciel de géométrie et d'un logiciel de calcul formel » : Problèmes d'optimisation.

Déroulement de la séance

1° Découverte de l'activité

Temps : 10 min.
Le professeur distribue la première page.
Cette page propose trois images :

a) L'étude de la chute d'eau depuis un récipient percé à différentes hauteurs (Léonard de Vinci)
b) La même étude d'après l'encyclopédie Wikipédia
c) Une photo correspondant à l'expérience

Le professeur présente l'expérience en précisant certains points :

- les trous sur la bouteille (cylindre) sont de même taille,
- la hauteur d'eau est constante,
- on s'intéresse au point d'impact sur le plan horizontal.

Pour illustrer ses propos, le professeur dispose d'un vidéoprojecteur, des trois documents et de vidéos de l'expérience.

Les documents proposés ne permettent pas de répondre de façon certaine à la question posée :
« **Si on se base sur ces différents documents, selon vous à quelle hauteur faut-il percer un cylindre pour que l'impact du jet sur le sol soit le plus loin possible du cylindre ? »**
Ainsi, les réponses peuvent être contradictoires :

- Pas en haut car il n'y a pas de pression …
- C'est en bas qu'il faut faire le trou car il y a beaucoup de pression, oui mais le trou est proche du sol.
- En haut pas il n'y a pas beaucoup de pression, mais on part de haut, plus bas il y a plus de pression, mais on part de plus bas, donc le sol est proche. Ces deux éléments sont antagonistes. C'est donc peut-être au milieu de la colonne d'eau.
- Le document de l'encyclopédie Wikipédia laisse penser que c'est à peu près toujours au même endroit.
- Le document de Léonard de Vinci inspire la réponse le tiers de la hauteur de la colonne d'eau (ou deux-tiers du sommet de cette colonne).

A noter que les élèves ont accès à internet.

Le lien mis à disposition http://en.wikipedia.org/wiki/Spouting_can renvoie à la loi de Torricelli.
Sur cette page, si on clique sur l'illustration on accède à son historique :
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spouting_can_jets.svg#filehistory.
Cet historique montre l'évolution de l'illustration : la plus ancienne ressemble à celle de Léonard de Vinci.
L'article de l'encyclopédie propose aussi :
http://www.4physics.com/phy_demo/SpoutingCylinder/SpoutingCylinder.html
qui expose la théorie liée à l'expérience proprement dite.

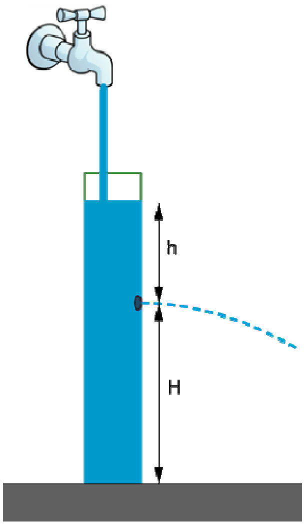
Les élèves ont aussi recherché sur un moteur de recherche « loi Torricelli ». Ce qui donne directement la page Wikipédia suivante : http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Torricelli.
Cet article donne une photo de l'expérience avec la légende suivante : « *Plus la hauteur de liquide est importante, plus la vitesse est grande.* »

En fin de découverte, le professeur recense les hypothèses/conjectures qu'il note au tableau.
Il relance l'enjeu : on n'est pas tous d'accord, même si l'hypothèse la plus courant est « c'est au milieu ».
On va essayer de vérifier …

2° Introduction des formules.

Temps : 10 min.
Le professeur distribue la deuxième page.
Il présente les « formules ».
Face à ces formules écrites, il faut tout de suite rassurer les élèves pour garder leur motivation :
« il ne s'agit pas de démonter ces formules, mais de les utiliser pour pouvoir apporter une réponse à la question « à quelle hauteur percer le cylindre ? » Nous allons les regarder ensemble ! ».

C'est une classe dialoguée.

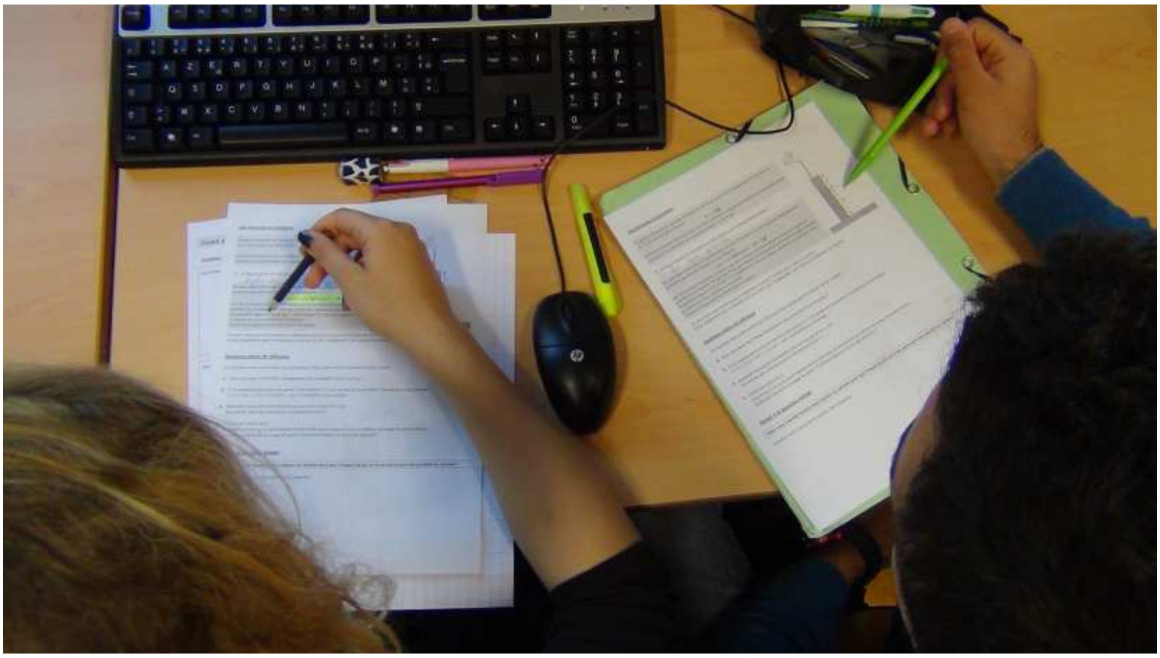


- Présentation du schéma avec la signification de h et H : hauteurs d'eau en dessus et en dessous du trou.
- Les élèves ont évoqué la « vitesse » à la sortie du trou dans la phase précédente, c'est l'occasion de présenter la formule : $V = \sqrt{2 \times g \times h}$.
- Cette vitesse est « horizontale ».
- Le fait de n'avoir que h confirme l'intuition de certains élèves (fonction linéaire) : plus la hauteur h est grande, plus il y a de pression au niveau du trou, et donc plus la vitesse de la goutte d'eau à la sortie du trou est grande.
  C'est l'occasion de s'appuyer sur les variations des fonctions (fonction linéaire et fonction racine carrée qui sont deux fonctions croissantes.) Il faut donc percer à la base du cylindre pour avoir la plus grande vitesse. Ce qui répond à la première question posée dans le document.
- Comment expliquer les deux autres formules : $x_H(t) = t \times \sqrt{2gh}$ et $y_H(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$?
  - La hauteur d'eau dans le cylindre doit être constante.
    En d'autre terme h + H = constante. On pourra prendre cette constante égale à 1 mètre.
  - Définir le repère (axe des abscisses est le sol, l'axe des ordonnées la génératrice du cylindre où sont situé les trous) et le fait que si la goutte d'eau est représentée par un point M, les coordonnées de M sont $(x_H(t) ; y_H(t))$; elles dépendent (sont fonction) du temps.
  - L'abscisse $x_H(t) = t \times \sqrt{2gh}$ peut s'expliquer par le fait que $t \times \sqrt{2gh}$ est le produit du temps par la vitesse horizontale.

- L'ordonnée $y_H(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$ peut expliquer de la manière suivante :
  au départ, la goutte sort du trou ; elle est à une hauteur H. Ensuite la goutte tombe en chute libre ; son ordonnée diminue de $\frac{1}{2}gt^2$ d'après la théorie de la chute des corps[1]. D'où la formule : $H - \frac{1}{2}gt^2$
- Enfin, il faut faire remarquer que les formules ne dépendent pas de la forme du contenant (il faut juste que les trous soient sur une verticale), ni de la quantité de liquide. Seules « h » la hauteur d'eau qui est au-dessus du trou et « H » la hauteur du trou par rapport au sol sont les informations nécessaires.

<u>3° Appropriation par les élèves.</u>

Temps : 25 min.



Le professeur engage les élèves à répondre aux questions de la partie « quelques pistes de réflexions ».
Il précise que l'on a l'ordinateur à disposition sans en dire plus et sans préciser le logiciel à utiliser.
Le professeur propose de faire les calculs pour H=1/3 puis à la question suivante pour H=2/3. Ce qui correspond à peu près aux jets "b" et "c" du document de Léonard de Vinci.

H = 1/3

temps	$x_H(t)$	$y_H(t)$
0,00	0,000	0,333
0,10	0,362	0,284
0,20	**0,723**	**0,137**
0,30	**1,085**	**-0,108**
0,40	1,447	-0,451

H = 2/3

temps	$x_H(t)$	$y_H(t)$
0,00	0,000	0,667
0,10	0,256	0,618
0,20	0,511	0,470
0,30	**0,767**	**0,225**
0,40	**1,023**	**-0,118**

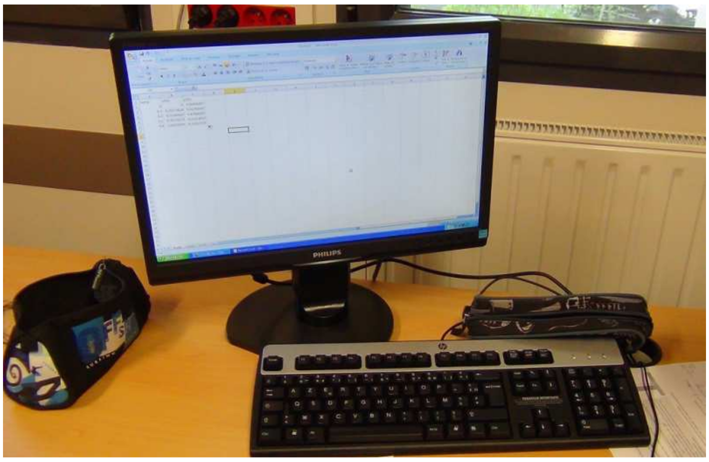
L'interprétation attendue est :

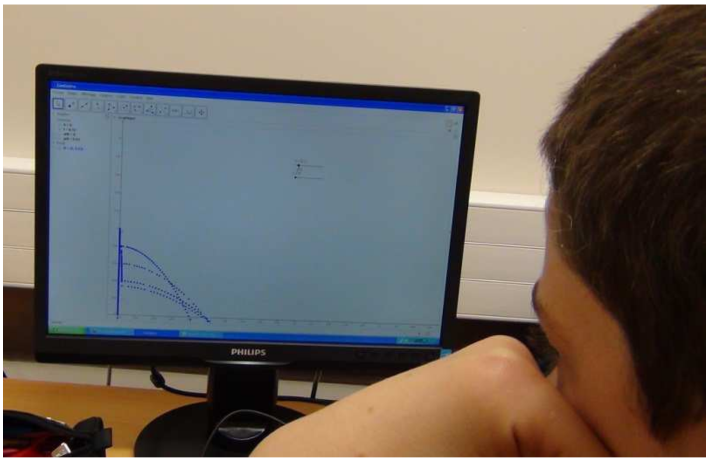
- Le temps mis par la goutte d'eau pour toucher le sol est :
  Entre 0.2 et 0.3 seconde pour H =1/3 et entre 0.3 et 0,4 seconde pour H = 2/3
- Le point d'impact est[2] :
  Entre 0,723 et 1,085 m pour H = 1/3 et entre 0,767 et 1,023 m pour H = 1/3

[1] Suivant le niveau des élèves, cette théorie n'est pas toujours connue. Si c'est le cas il faut la prendre comme telle car ce n'est pas l'enjeu de l'exercice.

[2] Ce résultat pourrait disqualifier l'illustration de Léonard de Vinci si l'intervalle de temps était de l'ordre de 0.01 s au lieu de 0.1 s

Concernant le logiciel, il faut noter que la majorité des groupes a choisi d'utiliser Géogébra, certains groupes se sont tourné vers un tableur d'autre en sont restés à l'utilisation de la calculatrice (ce qui a nécessité de nombreux calculs …).
Dans un premier temps, aucun groupe ne fait le choix d'utiliser un logiciel de calcul formel.





Remarques :

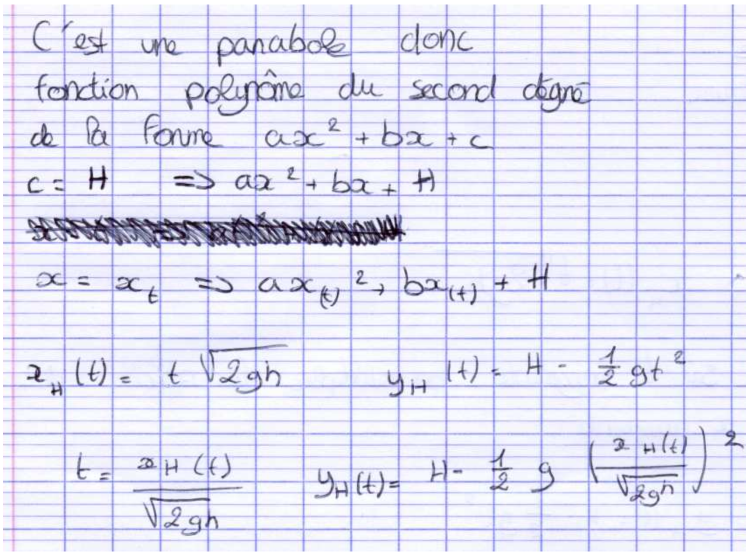
- La valeur « exacte » correspondant au point d'impact est $\frac{2 \times \sqrt{2}}{3}$ soit 0,94 m arrondi au cm par défaut.
- On peut accepter que les élèves fassent ces calculs avec la calculatrice (avec ou sans l'utilisation du tableau avec deux fonctions, c'est-à-dire que l'outil informatique n'est pas essentiel à ce niveau. On peut même imaginer que la suite se fasse uniquement avec cet outil. La calculatrice pourra donc être assimilée au tableur.
- A l'issue de ces questions, si les élèves ont utilisé leur calculatrice, c'est éventuellement l'occasion de les inciter à utiliser par exemple le tableur, mais cela aura une influence sur la suite du déroulement : les élèves l'utiliseront à nouveau pour la dernière partie.

4° Retour à la question initiale

Temps : 15 min.
Les élèves commencent à mettre en place une démarche.
Ils auront à terminer ce travail à la maison.

Certains groupes ont des difficultés à démarrer : ils ont l'intuition que la courbe est une parabole, mais ont du mal à voir comment obtenir son expression. Une aide du professeur est alors la bienvenue.

D'autres groupes sont rapidement sur une voie susceptible de déboucher sur un résultat.



C'est une parabole donc
fonction polynôme du second degré
de la forme $ax^2 + bx + c$
$c = H \Rightarrow ax^2 + bx + H$

$x = x_t \Rightarrow a x_{(t)}^2 , b x_{(t)} + H$

$x_H(t) = t\sqrt{2gh}$ $y_H(t) = H - \frac{1}{2} g t^2$

$t = \frac{x_H(t)}{\sqrt{2gh}}$ $y_H(t) = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_H(t)}{\sqrt{2gh}}\right)^2$

Ce qui a été fait après

- Une institutionnalisation sur les différentes méthodes utilisées par les groupes pour répondre au problème.
- Une discussion sur les apports des différents logiciels utilisés pour la résolution du problème : facilité de mise en œuvre, limites d'utilisation, ce qu'ils permettent de visualiser ou de calculer (différents registres d'utilisation : graphique, numérique, analytique …).

Mais l'objectif principal de cette activité est d'aider les élèves à mettre en place une démarche dans ce type de situation concrète qu'il faut modéliser, et de leur permettre de mobiliser les différentes compétences : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

6. Exemples de quelques démarches

1. Résolution mathématique :

a) Première démarche

On recherche le temps t_0 correspondant à l'instant du point d'impact de la goutte d'eau sur le sol puis on détermine la valeur maximale de l'abscisse correspondante.

Au moment de l'impact de la goutte d'eau sur le sol, le temps t_0 est solution de :

$$\begin{cases} x_H(t) = t \times \sqrt{2gh} \\ 0 = H - \frac{1}{2} \times (gt^2) \end{cases} \quad \text{(on a } y_H(t) = 0\text{).}$$

La seconde égalité donne : $t_0 = \sqrt{\frac{2 \times H}{g}}$.

En remplaçant dans la première égalité, on obtient : $x_H(t_0) = \sqrt{\frac{2 \times H}{g}} \times \sqrt{2gh}$ soit $\mathbf{x_H(t_0) = 2\sqrt{H \times h}}$

Cette valeur est l'abscisse du point d'impact (en fonction de H et h), c'est la **portée du jet d'eau**.

On recherche maintenant maximum de cette expression, c'est-à-dire la **portée maximale du jet d'eau**, sachant que la longueur $H + h$ est constante (Hauteur de la colonne d'eau).

L'expression $2\sqrt{H \times h}$ est maximale quand le produit $H \times h$ est, lui-même, maximal.

Dans notre situation, la hauteur totale de la colonne d'eau est 1, on a donc $H + h = 1$, soit $H \times h = H(1 - H)$.

On vérifie que le trinôme en H : $T(H) = H(1 - H)$ atteint son maximum en $H = 1/2$ c'est-à-dire lorsque le trou est à mi-hauteur de la cuve.

Le jet qui aura la plus grande portée est celui qui provient du trou percé au milieu de la cuve.

Remarque
On peut, dans un cas plus général, nommer C la hauteur totale de la colonne d'eau.
On a alors $H + h = C$, soit $H \times h = H(C - H)$.
On vérifie que le trinôme en H : $T(H) = H(C - H)$ atteint son maximum en $H = C/2$ ce qui correspond toujours à la mi-hauteur de la cuve.

b) Deuxième démarche

On détermine l'équation de la courbe décrite par la goutte d'eau.

Les coordonnées de la goutte d'eau sont $(x_H(t) ; y_H(t))$ avec : $x_H(t) = t \times \sqrt{2gh}$ et $y_H(t) = H - \frac{1}{2} \times (gt^2)$

On élimine le temps en écrivant par exemple : $(x_H(t))^2 = t^2 \times 2gh$ soit $t^2 = \frac{(x_H(t))^2}{2gh}$

En reportant dans la deuxième égalité on obtient : $y_H(t) = H - \frac{1}{2} \times g \times \frac{(x_H(t))^2}{2gh}$ soit $y_H(t) = H - \frac{(x_H(t))^2}{4h}$

La trajectoire de la goutte d'eau est donc la courbe d'équation $y = H - \frac{x^2}{4h}$ soit $y = -\frac{1}{4h}x^2 + H$.

C'est une parabole de sommet de coordonnées (0 ; H).

L'abscisse du point de contact avec le sol est donnée par l'équation : $-\frac{1}{4h}x^2 + H = 0$.

Ce qui conduit à : $x^2 = 4 \times H \times h$ soit $x = 2\sqrt{H \times h}$ et donc à la même conclusion que précédemment.

2. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

a) Première démarche

? Sauver Config session1.xws : exact real RAD 12 xcas STOP Kbd

1
```
supposons (g>0);supposons (H>0);supposons (h>0);supposons (t>0);
```
$$(g, H, h, t)$$

2
```
xH(t):=t*sqrt(2*g*h)
// Interprète xH
// Attention: g,h, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la compilation xH
```
$$t \;\; -> t*(\sqrt{2*g*h})$$

3
```
yH(t):=H-g*t^2/2
// Interprète yH
// Attention: H,g, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la compilation yH
```
$$t \;\; -> H-g*\frac{t^2}{2}$$

4
```
solve(yH(t)=0,t)
```
$$\left[(\sqrt{2})*\frac{\sqrt{H*g}}{g}\right]$$

5
```
sol:=sqrt(2)*sqrt(H*g)/g
```
$$(\sqrt{2})*\frac{\sqrt{H*g}}{g}$$

6
```
simplifier(yH(sol))
```
$$0$$

7
```
simplifier(xH(sol))
Simplification en supposant H near 0+
Simplification en supposant g near 0+
Simplification en supposant H near 0+
Simplification en supposant g near 0+
Simplification en supposant g near 0+
Simplification en supposant h near 0+
Simplification en supposant g near 0+
Simplification en supposant h near 0+
```
$$2*(\sqrt{H})*(\sqrt{h})$$

Si on suppose que H + h = 1 :

? Sauver Config session1.xws : exact real RAD 12 xcas STOP Kbd

8
```
h:=1-H
```
$$-H+1$$

9
```
2*sqrt(H)*sqrt(h)
```
$$2*(\sqrt{H})*(\sqrt{-H+1})$$

10
```
f(H):=2*sqrt(H)*sqrt(-H+1)
// Interprète f
// Succès lors de la compilation f
```
$$H \;\; -> 2*(\sqrt{H})*(\sqrt{-H+1})$$

11
```
deriver(f(H),H)
```
$$\frac{-(\sqrt{H})}{\sqrt{-H+1}}+\frac{\sqrt{-H+1}}{\sqrt{H}}$$

12
```
solve(deriver(f(H),H)=0,H)
```
$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

Si on reste dans le cas général :

? Sauver Config session2.xws : exact real RAD 12 xcas STOP Kbd

8 `h:=C-H`

$$C-H$$

9 `2*sqrt(H)*sqrt(h)`

$$2*(\sqrt{H})*(\sqrt{C-H})$$

10 `f(H):=2*sqrt(H)*sqrt(C-H)`

// Interprète f
// Attention: C, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la compilation f

$$H \to 2*(\sqrt{H})*(\sqrt{C-H})$$

11 `deriver(f(H),H)`

$$-\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{C-H}}+\frac{\sqrt{C-H}}{\sqrt{H}}$$

12 `solve(deriver(f(H),H)=0,H)`

$$\left[\frac{C}{2},\frac{C}{2}\right]$$

b) Deuxième démarche

? Sauver Config : exact real RAD 12 xcas STOP Kbd

1 `supposons (g>0);supposons (H>0);supposons (h>0);supposons (t>0);`

$$(g,\ H,\ h,\ t\ )$$

2 `solve(x=t*sqrt(2*g*h),t)`

$$\left[\frac{x}{\sqrt{2*g*h}}\right]$$

3 `substituer(y=H-g*t^2/2,t=x/(sqrt(2*g*h)))`

$$y=(-\frac{g*(\frac{x}{\sqrt{2*g*h}})^2}{2}+H)$$

4 `simplifier(-g*(x/(sqrt(2*g*h)))^2/2+H)`

$$\frac{4*H*h-x^2}{4*h}$$

5 `developper((4*H*h-x^2)/(4*h))`

$$-\frac{x^2}{4*h}+H$$

6 `solve((4*H*h-x^2)/(4*h)=0,x)`

$$\left[-2*(\sqrt{H*h}),\ 2*(\sqrt{H*h})\right]$$

7 `substituer(2*sqrt(H*h),h=C-H)`

$$2*(\sqrt{H*(C-H)})$$

8 `f(H):=2*sqrt(H*(C-H))`

// Interprète f
// Attention: C, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la compilation f

$$H \to 2*(\sqrt{H*(C-H)})$$

9 `deriver(f(H),H)`

$$\frac{C-H-H}{\sqrt{H*(C-H)}}$$

10 `solve(deriver(f(H),H)=0,H)`

$$\left[\frac{C}{2}\right]$$

Avec un logiciel de calcul formel, on reste uniquement sur l'aspect calculatoire du problème.

3. Utilisation d'un tableur

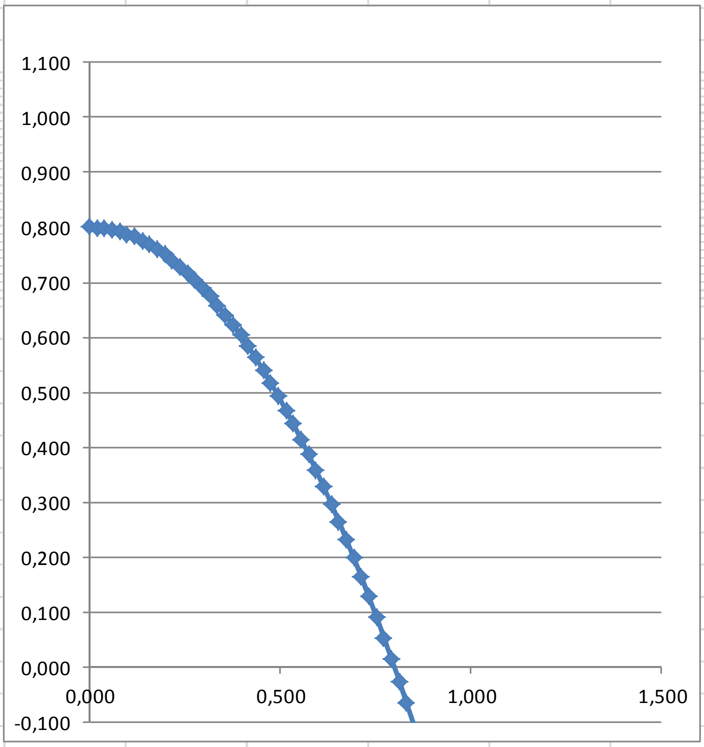
Bien que les formules donnent l'équation d'une courbe paramétrique, il est possible d'entreprendre une démarche de recherche à l'aide d'un tableur. Il suffit pour cela que les colonnes du tableau reprennent les formules données par l'énoncé.
Lors de la conception du tableau, il faut s'appuyer sur le temps : une colonne temps et les colonnes « coordonnées » qui dépendent de cette colonne temps.

En observant les données dans les colonnes du tableau, on peut répondre aux questions de la partie « Quelques pistes de réflexion ».

Ensuite, pour répondre à la question initiale, on peut représenter la trajectoire de la goutte d'eau en dessinant un nuage de points.

temps	xH(t)	yH(t)
0,00	0,000	0,800
0,01	0,020	0,800
0,02	0,040	0,798
0,03	0,059	0,796
0,04	0,079	0,792
0,05	0,099	0,788
0,06	0,119	0,782
0,07	0,139	0,776
[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,37	0,733	0,129
0,38	0,753	0,092
0,39	0,773	0,054
0,40	0,792	0,015
0,41	0,812	-0,025
0,42	0,832	-0,065
0,43	0,852	-0,107
0,44	0,872	-0,150
0,45	0,891	-0,193
0,46	0,911	-0,238
0,47	0,931	-0,284
0,48	0,951	-0,330
0,49	0,971	-0,378
0,50	0,990	-0,426

données	valeurs
h	0,20
H	0,80
Hauteur	1,00
g	9,81
intervalle	0,01



Pour répondre à la question posée, il faut changer la valeur de « h » et observer la position du point d'impact.

A noter que cette représentation n'est pas obligatoire. En effet, la réponse à la question s'obtient en observant les valeurs de $y_H(t)$, en particulier quand on passe d'une valeur positive à une valeur négative. Dans l'exemple ci-dessus, la goutte d'eau touche le sol entre 0,40 et 0,41 seconde.

Remarque :
Il est difficile, avec le tableur, de faire apparaître plusieurs nuages de points pour comparer différentes trajectoires, sauf si l'on prévoit différentes colonne yH(t).

Avec le tableur, le temps est un élément essentiel du problème puisqu'on doit le faire apparaitre dans une colonne. C'est donc l'aspect « courbe paramétrée » qui permet de démarrer la simulation avec ce logiciel.

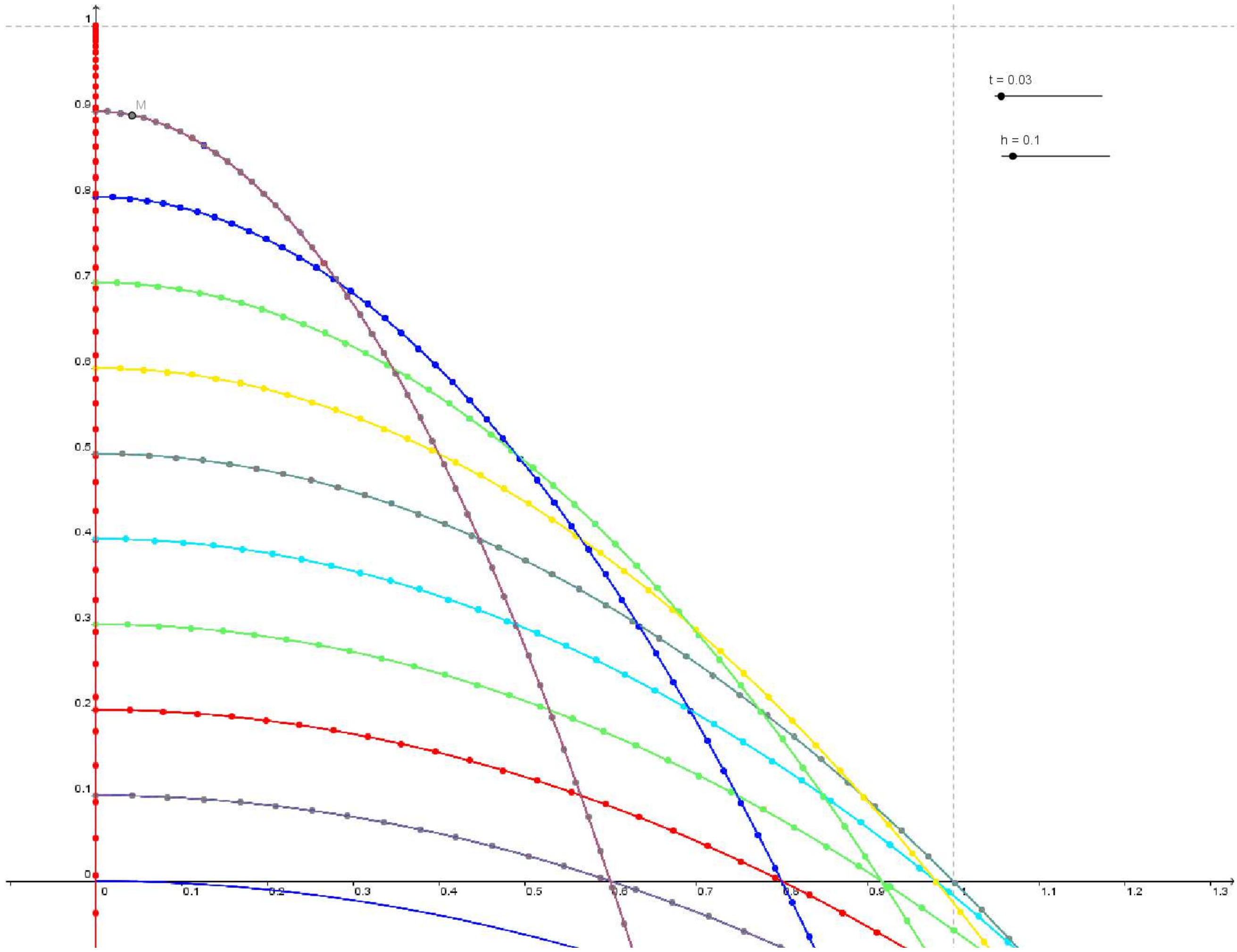
4. Utilisation de Géogébra[3]

Construction d'un nuage de points :
L'idée est de créer un curseur t qui définira le temps (avec $0 \leq t \leq 0{,}5$ par exemple)
puis un curseur h (avec $0 \leq h \leq 1$) et de définir le point M par ses coordonnées :

$$M = \left(t \times \sqrt{2 \times g \times h} \; ; \; (1 - h) \times \frac{1}{2} \times g\, t^2 \right)$$

En activant la trace, on obtient directement le nuage de points (voire le lieu du point M).

A condition de ne pas rafraichir l'affichage, on peut alors facilement comparer plusieurs trajectoires.



Avec ce type de logiciel, on met plutôt en avant la trajectoire de la goutte d'eau.

Par rapport au tableur, il est beaucoup plus simple de voir apparaître ces différents nuages (lieux) sur le même graphique et par suite de trouver la position attendue pour obtenir le jet le plus loin.
La manipulation de ce type de logiciel n'éloigne pas trop du contexte « physique » dans le sens où on obtient facilement la trajectoire de la goutte d'eau puisqu'on passe directement des formules au point sans passer par un tableau de valeur. Le temps reste au second plan.

[3] Ou tout autre logiciel de géométrie dynamique (Géométeur) qui offre les mêmes fonctionnalités.
A noter que le logiciel Géogébra offre aussi un module Tableur et un module Calcul formel. Il nous a semblé plus simple dans cette présentation de séparer les fonctionnalités.

5. Logiciels et représentations

Les logiciels utilisés semblent induire une certaine représentation du problème mais aussi une représentation du concept mathématique mis en jeu (ici une courbe paramétrée).
Le choix du logiciel peut donc avoir une influence sur les représentations que l'on peut se faire du problème et sur les démarches mises en œuvre.

D'autre part, du point de vue de l'élève, le logiciel peut-être un outil plus ou moins efficace pour la résolution du problème. En effet si les représentations de l'élève concordent avec la "conception" du logiciel (ses fonctionnalités, ses modes de représentation …) celui-ci jouera un rôle efficace dans la démarche de recherche de l'élève ; si non, il s'agira pour l'élève de franchir l'obstacle et de s'accorder avec les potentialités du logiciel.

Pour le professeur, cela le conduit à proposer à l'élève :

- soit le logiciel qui fonctionne de façon conforme avec ses représentations pour l'aider à développer sa propre démarche,
- soit un logiciel qui n'est pas conforme, créant ainsi un obstacle en liaison avec l'apprentissage visé, de sorte à induire d'autres démarches et d'autres représentations chez l'élève.
  Cela peut s'assimiler à une sorte de changement de cadre …

Le professeur peut aussi profiter des différentes approches proposées par ces différents logiciels pour confronter les élèves à différentes représentations d'un même problème.

Jean-Louis BONNAFET
Lycée Parc Chabrières
Formateur, IREM de Lyon
Formateur ESPé de LYON

Jean-François ZUCCHETTA
Formateur, IREM de Lyon
Formateur ESPé de LYON