ACADÉMIE DE LYON
Liberté
Égalité
Fraternité

Les mathématiques dans l'enseignement scientifique

SOMMAIRE

Comment prendre en compte les différents profils mathématiques des élèves dans l'enseignement scientifique de terminale ?

Exemple des probabilités.

1) Mathématiques pour le professeur
2) Exemples dans la classe
3) Pistes pour la différenciation

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Extraits du programme d'enseignement scientifique de terminale

(BO du 5 juillet 2019)

Biodiversité (SVT)

Pour la transmission de deux allèles dans le cadre du modèle de Hardy-Weinberg, établir les relations entre les probabilités des génotypes d'une génération et celles de la génération précédente.

Produire une démonstration mathématique ou un calcul sur tableur ou un programme en Python pour prouver ou constater que les probabilités des génotypes sont constantes à partir de la seconde génération (modèle de Hardy-Weinberg).

Utiliser des logiciels de simulation basés sur ce modèle mathématique.

Intelligence artificielle (PC)

L'inférence bayésienne est une méthode de calcul de probabilités de causes à partir des probabilités de leurs effets. Elle est utilisée en apprentissage automatique pour modéliser des relations au sein de systèmes complexes, notamment en vue de prononcer un diagnostic (médical, industriel, détection de spam…). Cela permet de détecter une anomalie à partir d'un test imparfait.

Les probabilités étant assimilées à des fréquences, il est possible de raisonner sur des tableaux à double entrée sans faire appel explicitement à la théorie des probabilités conditionnelles ni à la formule de Bayes.

https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/84/7/spe241_annexe_1158847.pdf

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Extrait du programme de seconde : (BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019.)

- **Modéliser le hasard, calculer des probabilités**

L'ensemble des issues est fini.

Contenus

(...)

– Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités attendues

– Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
– Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
– Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Lien entre probabilités et fréquences

Exemple du lancer de dé

Tableau de **fréquences**

Chiffre	1	2	3	4	5	6
Distribution	0,17	0,14	0,19	0,17	0,18	0,15

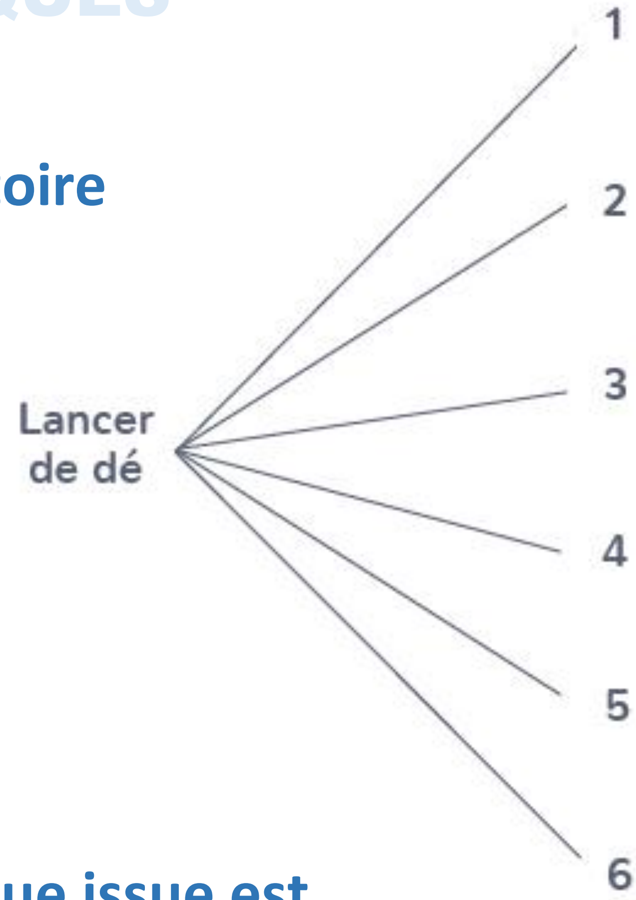
On assimile les fréquences à des **probabilités**.

$$P(\text{"avoir un 3"}) = \frac{1}{6}$$

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Représenter une expérience aléatoire

Arbre des possibles



Chaque face du dé a la même probabilité d'apparaitre.

$$P("avoir\ un\ 3") = \frac{1}{6}$$

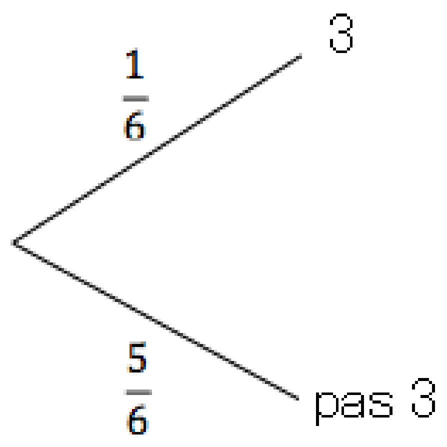
Dans un arbre des possibles, chaque issue est équiprobable.

Représenter une expérience aléatoire

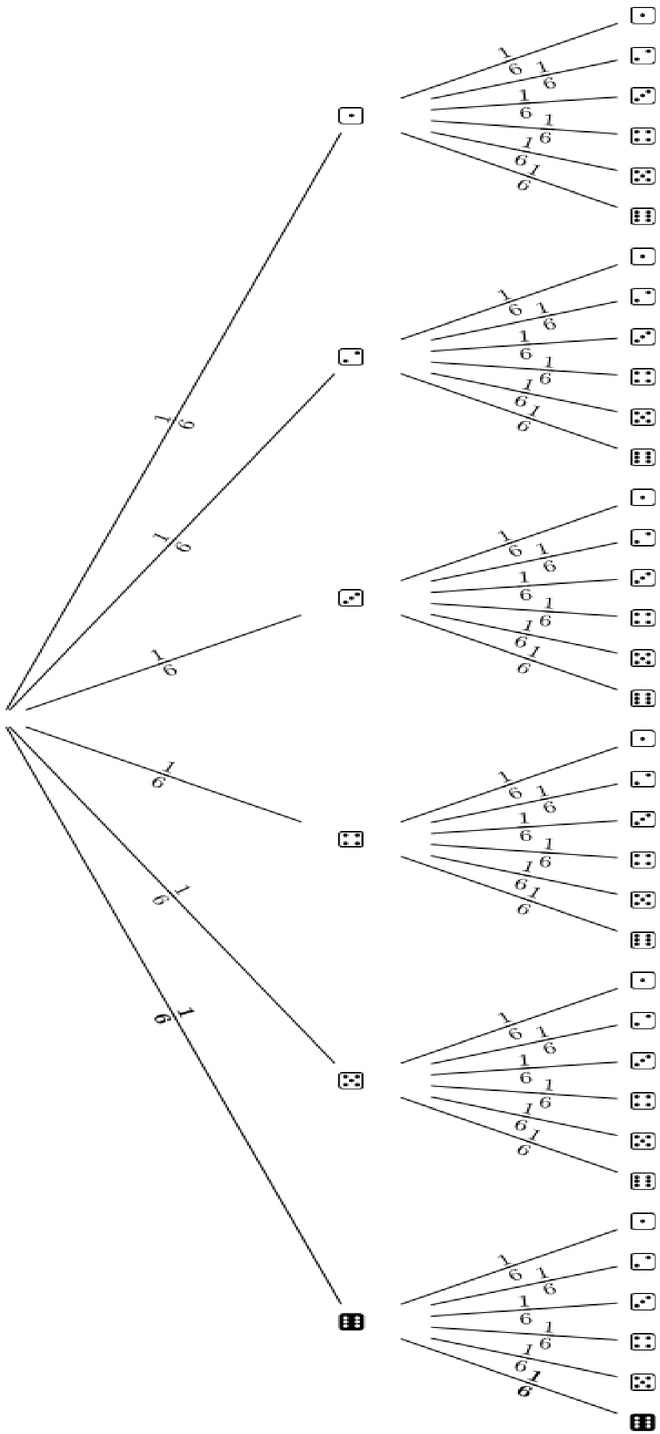
Arbre de probabilité

On simplifie l'arbre de dénombrement.

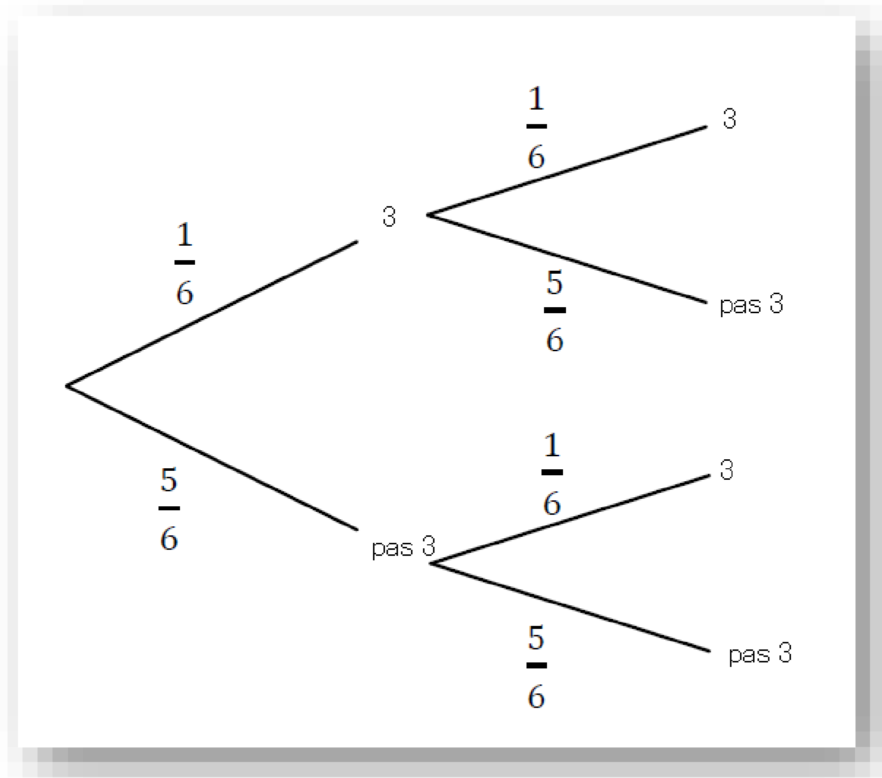
$$P(\text{"}avoir\ un\ 3\text{"}) = \frac{1}{6}$$



Dans un arbre de probabilités, les issues ne sont pas nécessairement équiprobables.



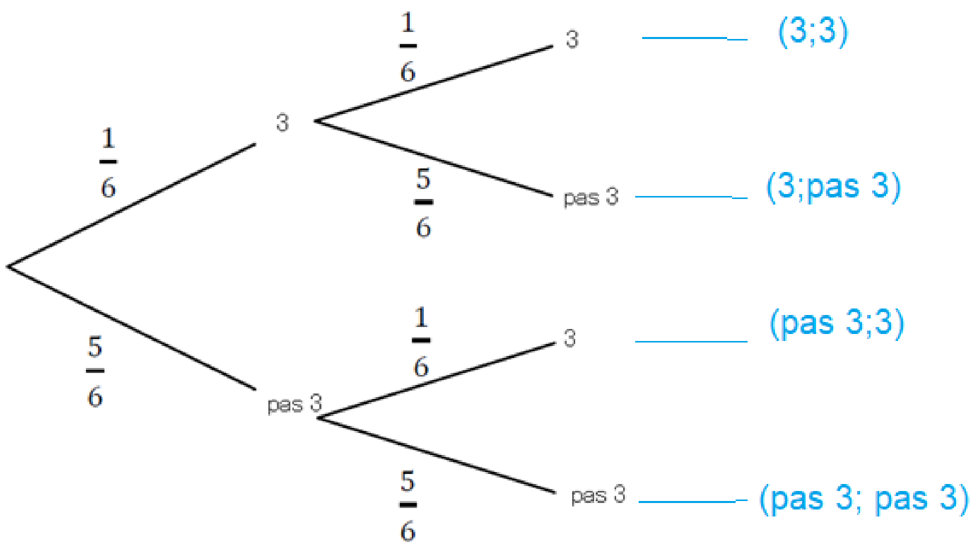
Représenter une expérience aléatoire à plusieurs épreuves



UN PEU DE MATHEMATIQUES

Règles de calcul dans arbre de probabilités :

$$P(3;3) = \ ?$$



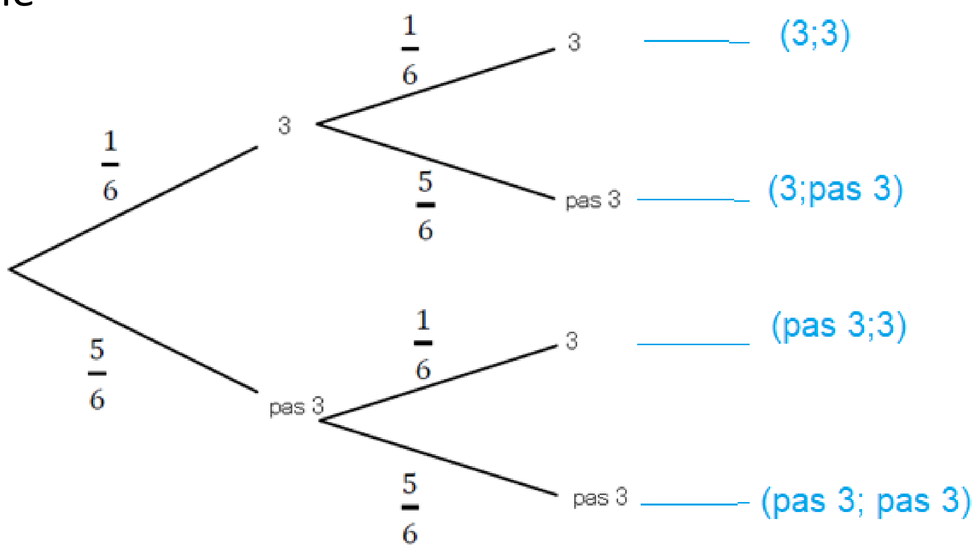
www.wooclap.com/**ZCCGZJ**

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Règles de calcul dans arbre de probabilités :

Pour avoir la probabilité d'un événement situé au bout d'une branche, on multiplie les probabilités écrites le long de la branche.

$$P(3;3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

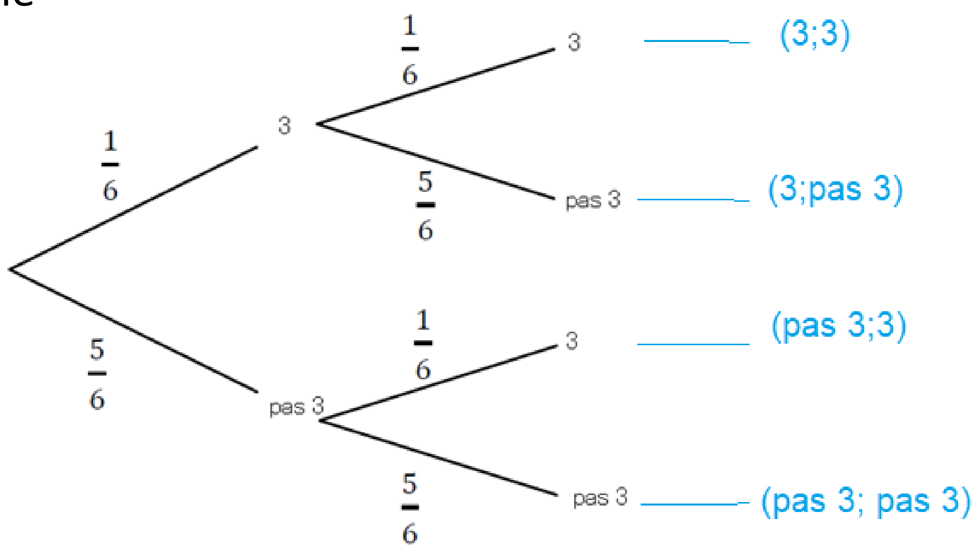


UN PEU DE MATHEMATIQUES

Règles de calcul dans arbre de probabilités :

Pour avoir la probabilité d'un événement situé au bout d'une branche, on multiplie les probabilités écrites le long de la branche.

$$P(3;3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



$$P(\text{"un seul 3"}) = \ ?$$

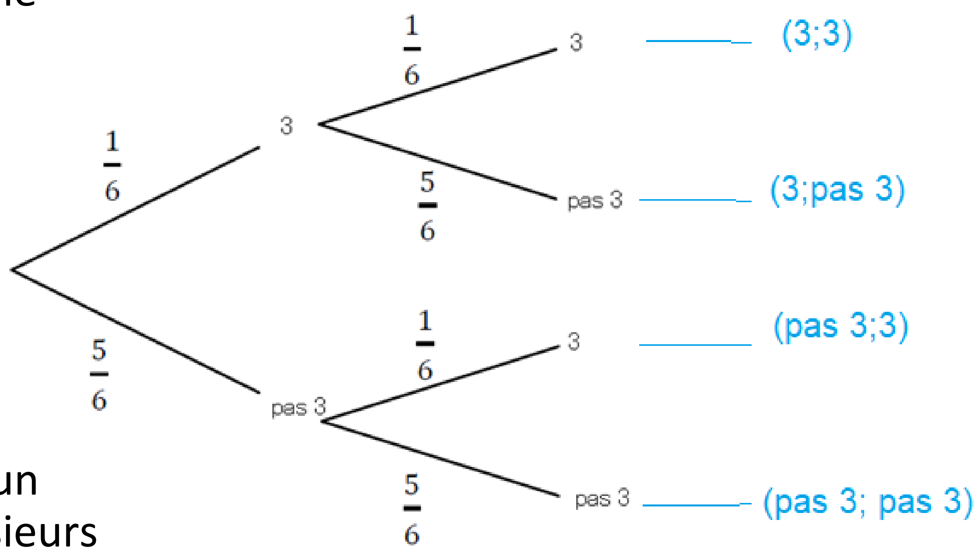
www.wooclap.com/**TCPUPH**

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Règles de calcul dans arbre de probabilités :

Pour avoir la probabilité d'un événement situé au bout d'une branche, on multiplie les probabilités écrites le long de la branche.

$$P(3;3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



Pour obtenir la probabilité d'un événement qui concerne plusieurs branches, on additionne les probabilités au bout des branches (Formule des probabilités totales)

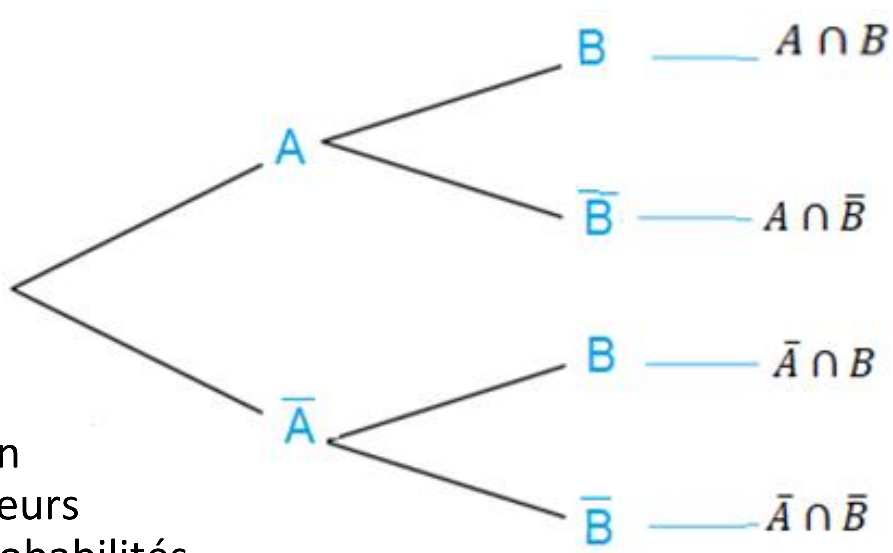
$$P(\text{un seul } 3) = P(3; pas\ 3) + P(pas\ 3; 3) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$$

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Règles de calcul dans arbre de probabilités :

Pour avoir la probabilité d'un événement situé au bout d'une branche, on multiplie les probabilités écrites le long de la branche.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

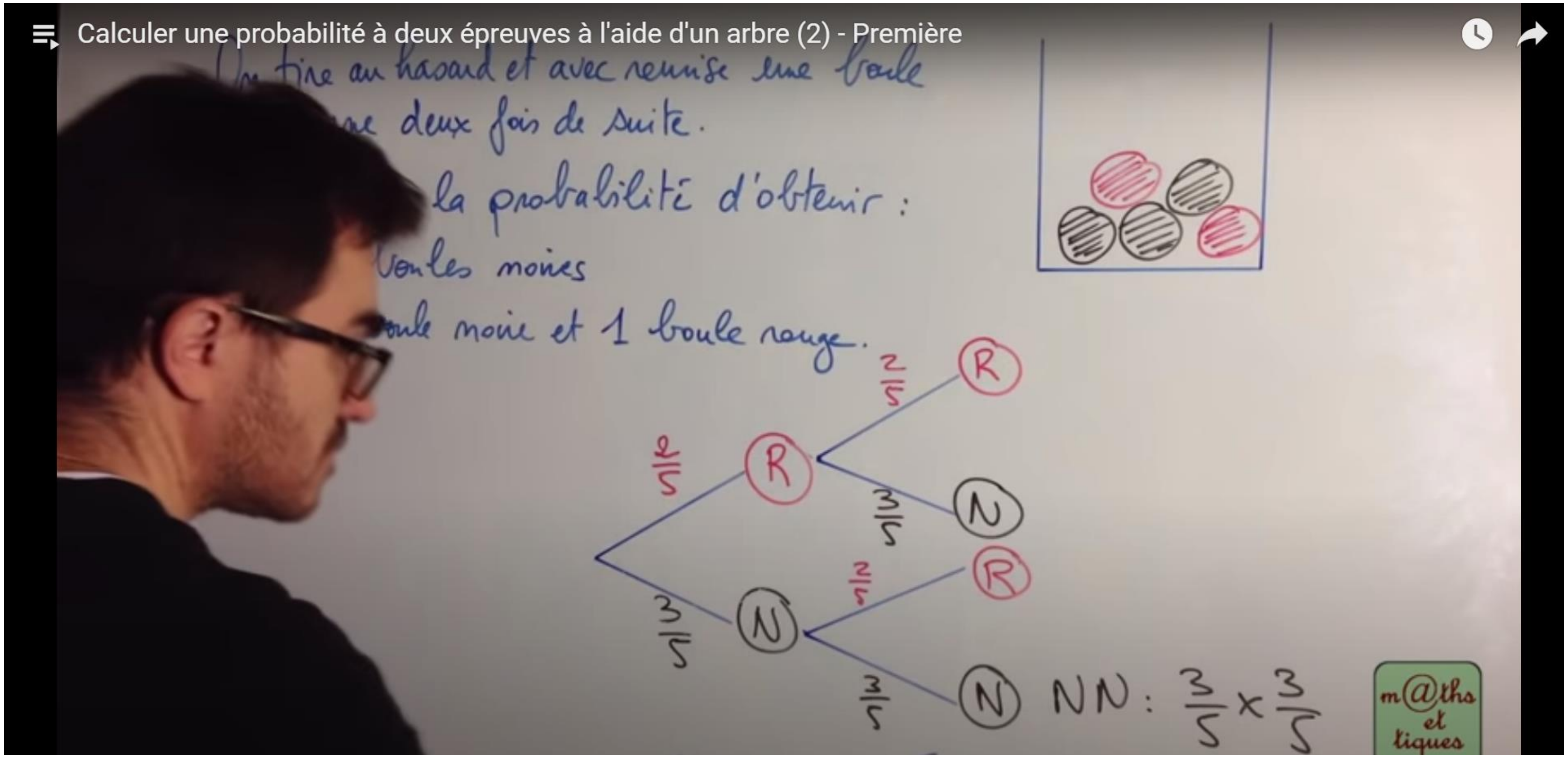


Pour obtenir la probabilité d'un événement qui concerne plusieurs branches, on additionne les probabilités au bout des branches (Formule des probabilités totales)

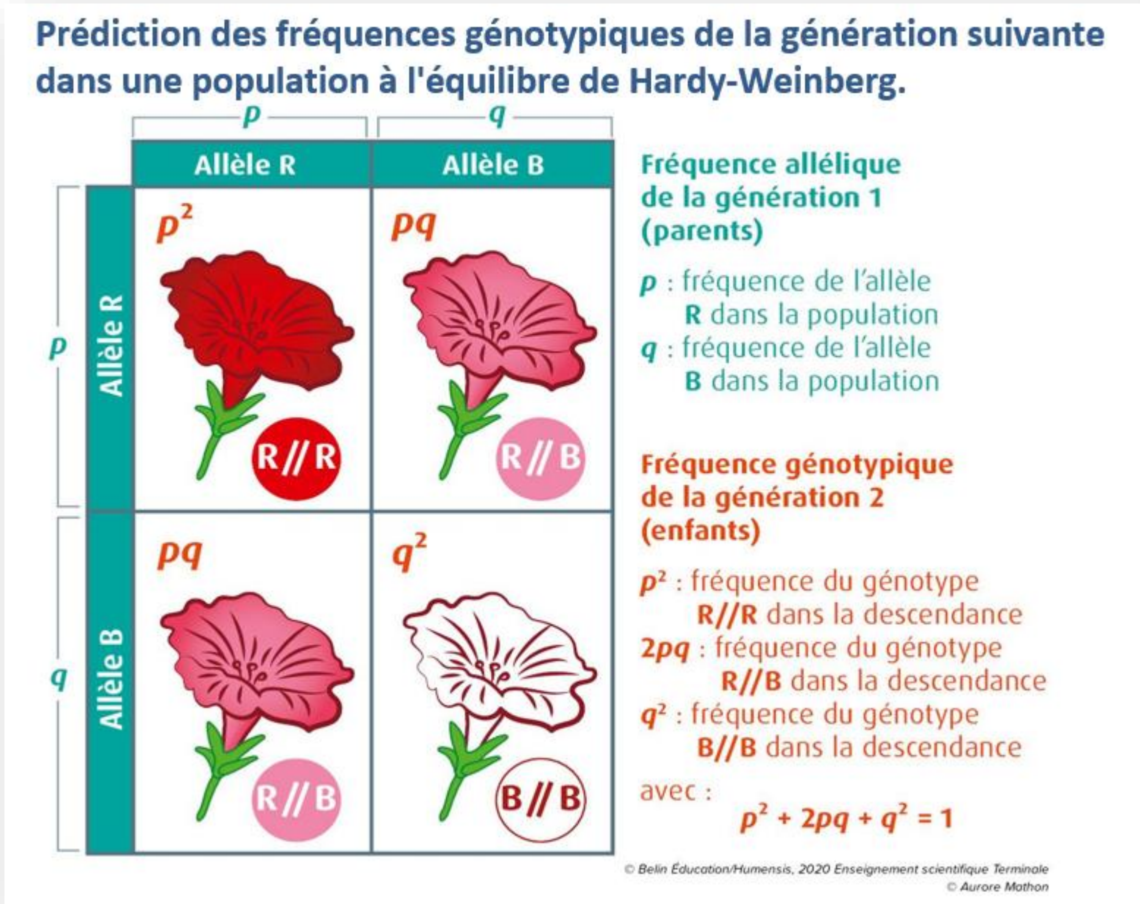
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

UN PEU DE MATHEMATIQUES

Pour en savoir plus sur les arbres : [chaine d'Yvan Monka]()

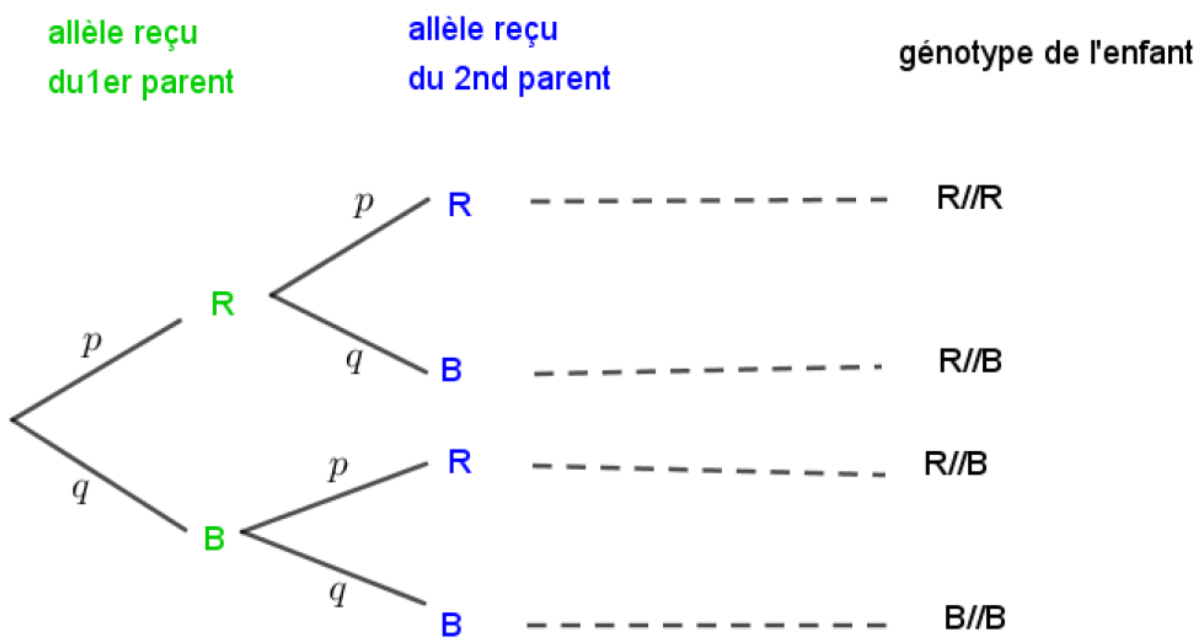


Dans la classe



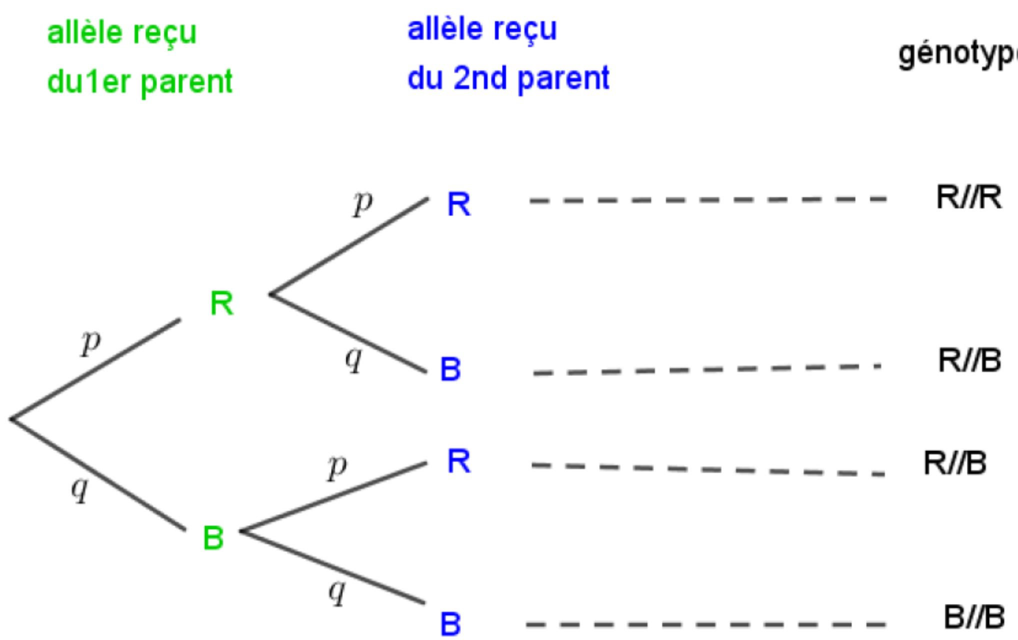
Document 4 page 201- Belin

Dans la classe



(Fiche 3 – collègues du Lycée L. Armand)

Dans la classe



$f(R//R) = p \times p = p^2$

$f(R//B) = 2 \times p \times q = 2pq$

$f(B//B) = q \times q = q^2$

$f(R) = f(R//R) + \frac{1}{2} f(R//B) = p^2 + \frac{1}{2} \times 2pq = p(p+q) = p$ car $p + q = 1$ et $f(B) = 1 - p = q$

On retrouve les mêmes fréquences qu'à la génération 1. De génération en génération, les fréquences alléliques vont donc rester stables. C'est la loi de Hardy-Weinberg.

(Fiche 3 – collègues du Lycée L. Armand)

Dans la classe

Inférence Bayesienne

			Total
	99 999	9	100 008
	899 991	1	899 992
Total	999 990	10	1 000 000

La probabilité que le patient soit malade, **sachant qu**'il a un test positif est $\frac{9}{100\,008}$

Les élèves ayant suivi la spécialité mathématiques en 1ère peuvent vous parler de probabilités conditionnelles et noter $P_T(M) = \frac{9}{100\,008}$.

Source : https://www.youtube.com/watch?v=yoNN0cqwSDs

Inférence Bayesienne

IA dans une application de streaming musical

Après avoir fourni un grand nombre de profils d'utilisateurs d'entraînement à l'intelligence artificielle, ses résultats sont les suivants :

. Sur 100 utilisateurs écoutants du rap, l'IA a reconnu le profil utilisateur de 98 d'entre eux.
. Sur 150 utilisateurs n'écoutant pas de rap, l'IA n'a pas reconnu le profil utilisateur de 5 d'entre eux.

Ces informations permettent de compléter un **tableau de contingence.**

		Réponse de l'IA		
		Rap	Autres styles	Total
Réponse de l'utilisateur	Rap	98	2	100
	Autres styles	5	145	150
	Total	103	147	250

Source : Sujet Evaluation 05 465

Dans la classe

Inférence Bayesienne

IA dans une application de streaming musical

		Réponse de l'IA		
		Rap	Autres styles	Total
Réponse de l'utilisateur	Rap	98	2	100
	Autres styles	5	145	150
	Total	103	147	250

Un nouvel utilisateur est présenté à l'IA. L'IA qualifie ce nouvel utilisateur d'amateur de rap.

La probabilité que le résultat de l'IA soit correct est :

Source : Sujet Evaluation 05 465

Inférence Bayesienne

IA dans une application de streaming musical

		Réponse de l'IA		
		Rap	Autres styles	Total
Réponse de l'utilisateur	Rap	98	2	100
	Autres styles	5	145	150
	Total	103	147	250

Un nouvel utilisateur est présenté à l'IA. L'IA qualifie ce nouvel utilisateur d'amateur de rap.

La probabilité que le résultat de l'IA soit correct est : $\frac{98}{103} \approx 95\%$.

C'est la probabilité que l'utilisateur soit amateur de rap, **sachant que** l'IA l'avait qualifié ainsi.

Source : Sujet Evaluation 05 465

Dans la classe

Pour se former on peut utiliser les ressources Eduscol :

https://eduscol.education.fr/1750/programmes-et-ressources-en-enseignement-scientifique-voie-g

Rubriques : **« Les mathématiques intervenant dans ce thème »**

Thème 3 : une histoire du vivant

Les mathématiques intervenant dans ce thème

- Estimation d'un effectif par échantillonnage
- Équilibre de Hardy-Weinberg
- Modèles démographiques
- Inférence bayésienne
- Machines et programmes
- Intelligence artificielle

DIFFERENCIATION

Les différents profils d'élèves

Que sait…	…un élève qui a arrêté les maths en fin de seconde ?	…un élève qui a arrêté les maths en fin de 1ère ?
Proportionnalité	Tableaux de proportionnalité, produit en croix, coefficient de proportionnalité	
Modèle linéaire	Fonction affine : $f(x) = mx + p$, calcul du coefficient directeur m et de l'ordonnée à l'origine p étant données deux images Représentation graphique par une droite, lectures de m et p sur le graphique	Suites arithmétiques : formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ formule explicite $u_n = u_0 + nr$

DIFFERENCIATION

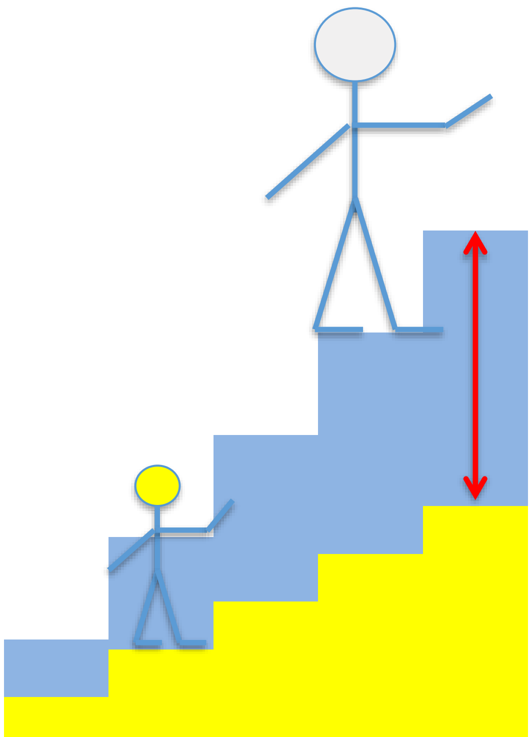
Que sait…	…un élève qui a arrêté les maths en fin de seconde ?	…un élève qui a arrêté les maths en fin de 1ère ?
Modèle exponentiel	Augmenter de t %, c'est multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$ Evolutions successives $\times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ Taux de variation en % $\frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$	Fonction exponentielle Suites géométriques : formule de récurrence $u_{n+1} = u_n \times q$ formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$
Probabilités	Tableaux à double entrée Arbre de dénombrements	Probabilités conditionnelles Arbres de probabilités et règles de calcul dans les arbres

DIFFERENCIATION

Que sait…	…un élève qui a arrêté les maths en fin de seconde ?	…un élève qui a arrêté les maths en fin de 1ère ?
Intervalle de fluctuation/ intervalle de confiance estimation	Notion d'échantillon. Loi des grands nombres : les fréquences observées fluctuent autour de la probabilité, et cette fluctuation diminue quand la taille de l'échantillon augmente	Rien de plus
Polynôme du second degré	Seulement la fonction $x \longmapsto x^2$ Plus généralement sur les fonctions : notion de minimum sur un intervalle	Etude des variations d'un polynôme du second degré par dérivation et étude du signe de la dérivée
Graphes	Rien en maths, mais vu en SNT	Rien de plus

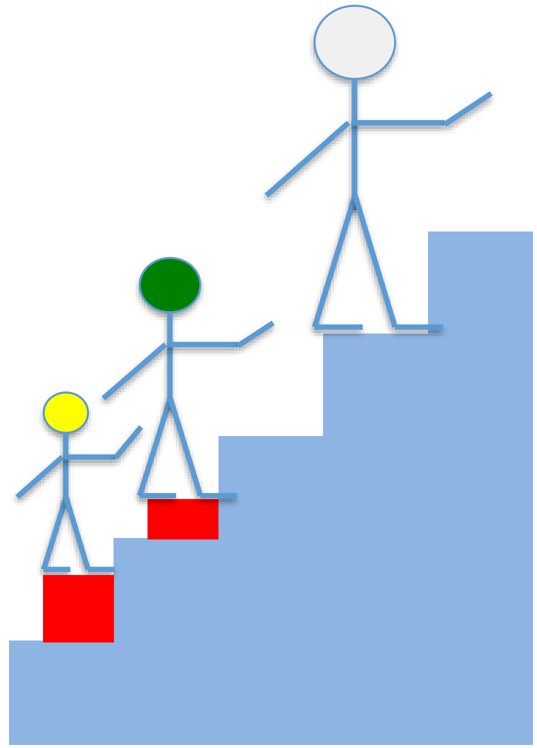
DIFFERENCIATION

Différenciation / Individualisation



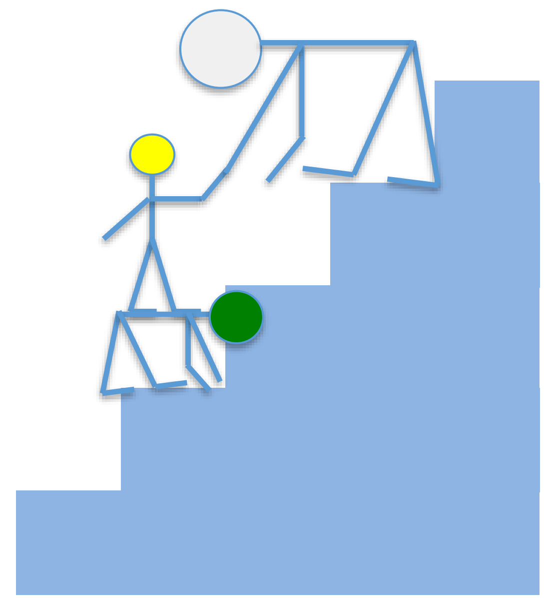
Exercices et objectifs distincts

Soutien / Etayage



Aides différentes, même objectif

Classes coopératives



Co-construction des savoirs et savoirs-faires

(Prof. Dr. Leisen)

Exemple en Physique-chimie :

Exercice 4 (*) (**) : On considère le cas où $R_1 = 0{,}1\,\Omega$ $R_2 = 0{,}2\,\Omega$ $R_3 = 0{,}1\,\Omega$ $R_4 = 0{,}1\,\Omega$
$I_3 = 3\text{ A}$ $I_4 = 3\text{ A}$ $s_1 = 5\,A$ $s_2 = 5\,A$
Déterminer la valeur de I_1 minimisant la puissance dissipée par effet Joule.

<u>Méthode :</u>
Étape 1 : Écrire la formule de la puissance dissipée par effet Joule et remplacer les valeurs numériques données dans l'énoncées.

$$P = R_1 I_1{}^2 + R_2 I_2{}^2 + R_3 I_3{}^2 + R_4 I_4{}^2$$

Étape 2 : Utiliser la loi des nœuds pour exprimer I_2 en fonction des constantes et de i_1.
On remplace alors I_2 dans la formule de l'étape précédente et on obtient un polynôme du second degré.

<u>Solution :</u>
<u>Exemple :</u> On considère le cas où
Étape 1 : $P = 0{,}1 i_1{}^2 + 0{,}2 i_2{}^2 + 0{,}1 \times 3^2 + 0{,}1 \times 3^2$

Donc $P = 0{,}1 i_1{}^2 + 0{,}2 i_2{}^2 + 1{,}8$

Étape 2 : D'après la loi des nœuds,
on sait que $i_1 + i_2 = i_3 + i_4$ donc $i_1 + i_2 = 6$

Donc $i_2 = 6 - i_1$

On obtient donc $P = 0{,}1 i_1{}^2 + 0{,}2(6 - i_1)^2 + 1{,}8$

$$P = 0{,}3\, i_1^2 - 2{,}4\, i_1 + 9$$

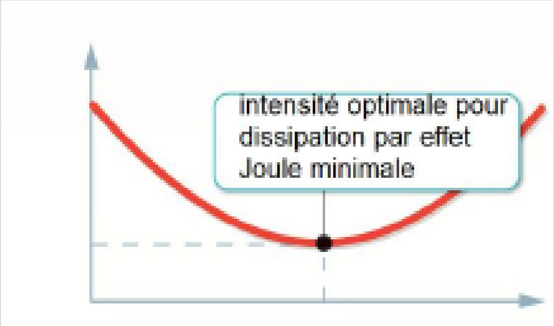
(Fiche 5 – collègues du Lycée L. Armand)

DIFFERENCIATION

Exemple en Physique-chimie :

Étape 3 :

Niveau 1 (*) : Lire graphiquement sur la calculatrice pour quelle intensité la puissance dissipée est minimale.



Niveau 2 (**) : Déterminer par le calcul l'intensité pour laquelle la puissance dissipée est minimale.

Attention : il faut tenir compte des contraintes sur I_1 et I_2 !

Étape 3 :

Niveau 1 (*) : On trace la courbe sur la calculatrice : Y= $0{,}3x^2 - 2{,}4x + 9$.

Les contraintes sont : $i_1 \leq 5$ et $i_2 \leq 5$ donc $6 - i_1 \leq 5$ donc $i_1 \geq 1$.

On regarde donc le minimum de la courbe pour x compris entre 1 et 5 (en rouge sur le graphique). Les pertes par effet Joule seront minimales pour $i_1 = 4\ A$.

Niveau 2 (**) : La parabole a les branches tournées vers le haut. On cherche pour quelle valeur de x elle atteint son minimum :

$$P'(x) = 0{,}6i_1 - 2{,}4$$

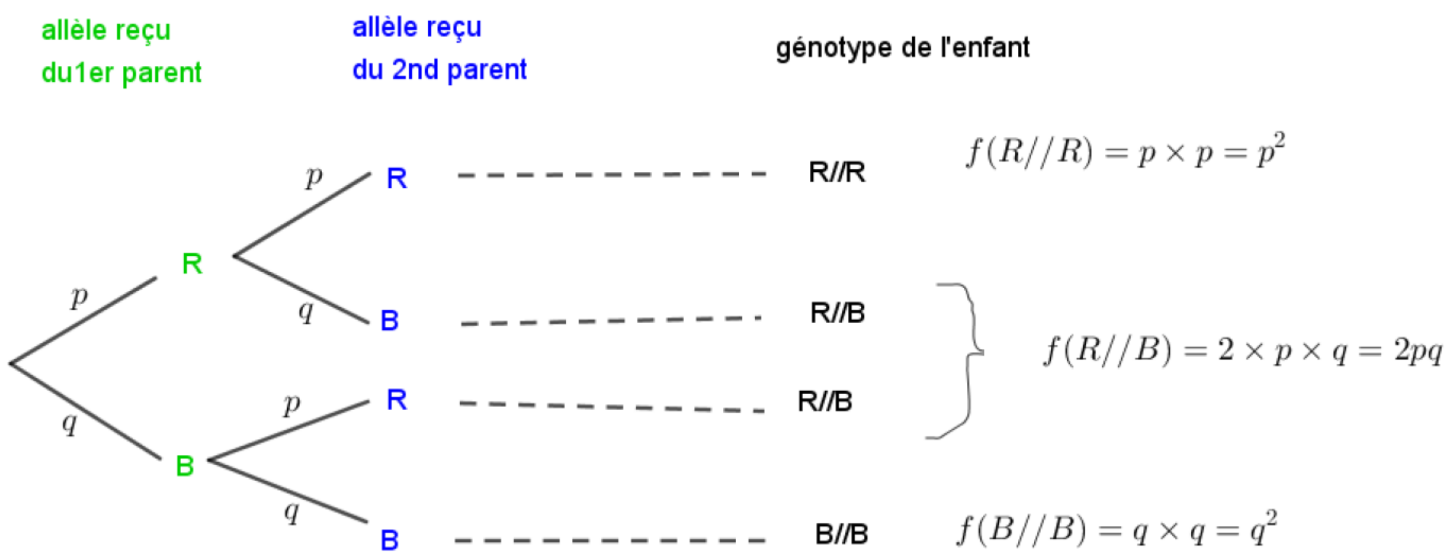
$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}6i_1 = 2{,}4 \Leftrightarrow i_1 = 4$$

Les pertes par effet Joule seront minimales pour $i_1 = 4\ A$.

(Fiche 5 – collègues du Lycée L. Armand)

DIFFERENCIATION

Exemple en SVT :

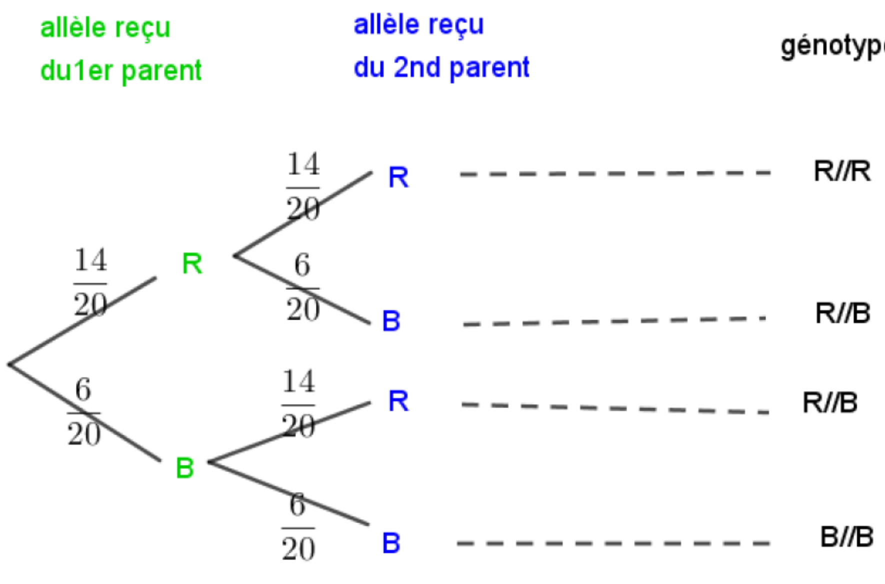


$f(R) = f(R//R) + \frac{1}{2} f(R//B) = p^2 + \frac{1}{2} \times 2pq = p(p+q) = p$ car $p + q = 1$ et $f(B) = 1 - p = q$

On retrouve les mêmes fréquences qu'à la génération 1. De génération en génération, les fréquences alléliques vont donc rester stables. C'est la loi de Hardy-Weinberg.

DIFFERENCIATION

Exemple en SVT :



$$f(R//R) = \frac{14}{20} \times \frac{14}{20} = \frac{196}{400}$$

$$f(R//B) = 2 \times \frac{14}{20} \times \frac{6}{20} = \frac{168}{400}$$

$$f(B//B) = \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = \frac{36}{400}$$

$f(R) = f(R//R) + \frac{1}{2} f(R//B) = \frac{196}{400} + \frac{1}{2} \times \frac{168}{400} = \frac{280}{400} = \frac{14}{20}$ et $f(B) = 1 - f(R) = \frac{6}{20}$

On retrouve les mêmes fréquences qu'à la génération 1. De génération en génération, les fréquences alléliques vont donc rester stables. C'est la loi de Hardy-Weinberg.

DIFFERENCIATION

Outils pour la différenciation :

Pour des capsules vidéos de mathématiques : [Site d’Yvan Monka]

Pour créer vos propres capsules : [screen-o-matic]