



# PROBABILITÉS

## 1 Quelques formules

Exercice 1.

Coder :

$$\begin{aligned} V(X) &= \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2 \\ &= \sum_i p_i \left( x_i - \left( \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) \right)^2 \\ P(A) &= \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P_{B_k}(A) P(B_k) \end{aligned}$$

- C'est `\sum` qui donne le symbole  $\Sigma$ .
- On pourra utiliser `\begin{align*}...\end{align*}` avec des séparateurs comme dans un tableau ( `&` entre deux cellules et `\\` pour changer de ligne)

Exercice 2.

Coder :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq p \leq n-1: \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

- Utiliser `\binom{}{}`
- On trouvera le reste dans les menus de  $\text{\TeX}$ maker.
- Essayer l'instruction `\colon`.

Exercice 3 (des cartes).

Coder :

On tire une carte dans un jeu de 32, l'univers est

$$\Omega = \{R\heartsuit, D\diamondsuit, V\spadesuit, \dots\}$$

$\text{\TeX}$  ne s'arrête pas là : jeter un oeil à la page  
<http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/vrac/cartes/>.

## 2 Des arbres

Deux packages présentent des instructions très pratiques pour les arbres :

1. Le package `pst-tree` (extension de `PSTricks`). On consultera la doc <http://cgm.cs.mcgill.ca/~msud-er/latex/pstricks.pdf> (faire une recherche sur le mot `tree`).

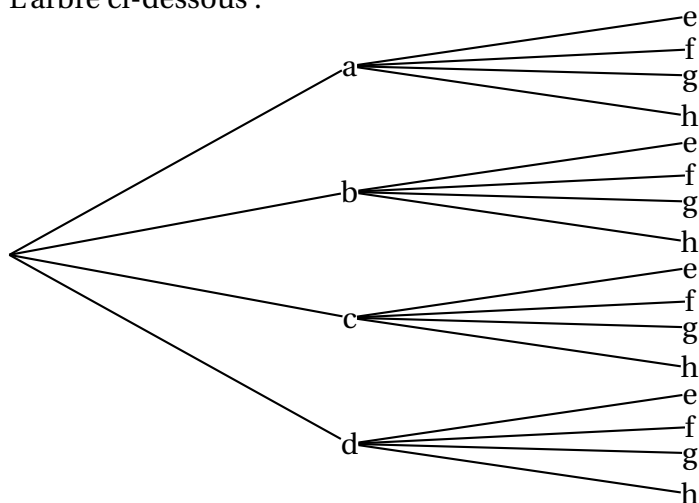


Pour un bon point de départ, consulter les exemples de la page <http://quickies.seriot.ch/index.php?cat=5>.  
 Une autre page d'exemples en tout genre : <http://tug.org/PSTricks/main.cgi?file=pst-tree/pst-tree>

- Le package tikz. Le paragraphe de la doc de tikz consacré aux arbres est assez clair. On peut la consulter par exemple à l'adresse <http://www.ctan.org/tex-archive/help/Catalogue/entries/pgf.html>.  
 On trouvera quelques exemples d'arbres codés avec tikz à l'adresse suivante :  
<http://www.fauskes.net/pgftikzexamples/tag/trees/>.

**Exercice 4.**

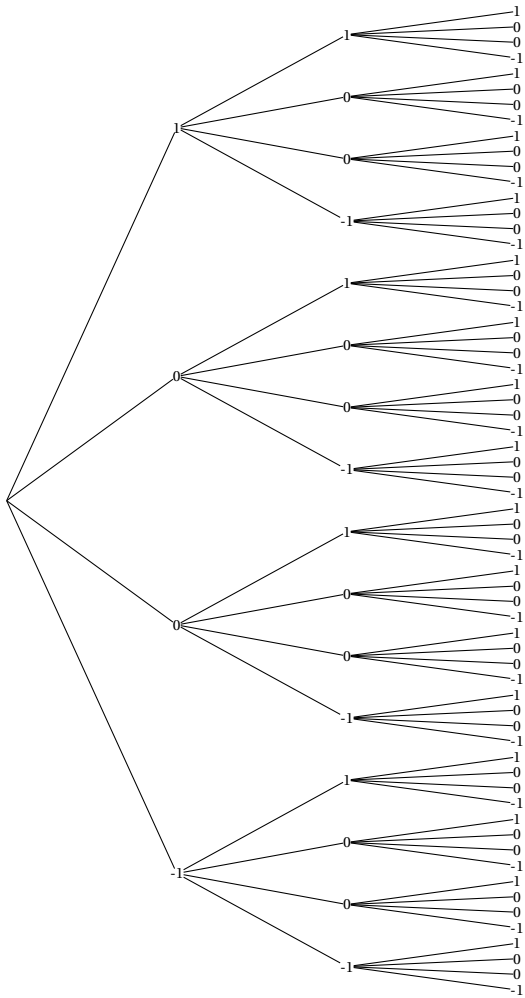
L'arbre ci-dessous :



peut s'obtenir par le code :

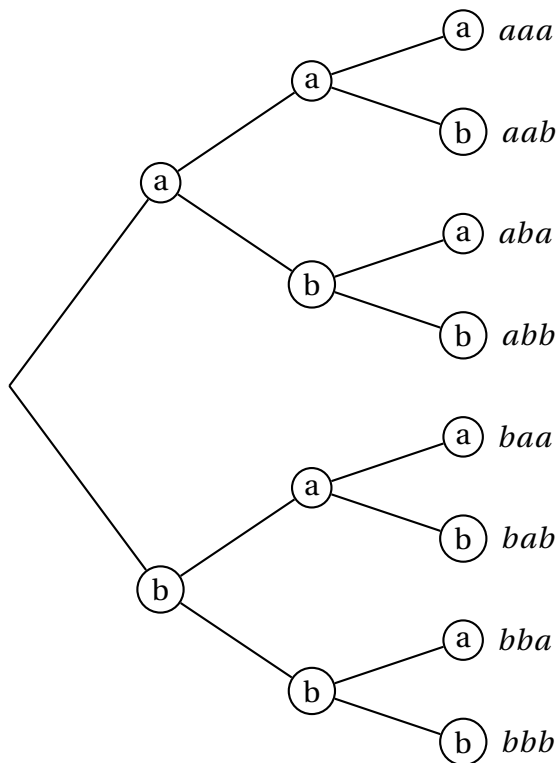
```
\pstree [levelsep=4.5cm, treesep=0.15cm, treemode=R] %
{\Tr {}}
{\pstree{\TR{a}}
  {\TR{e}\TR{f}\TR{g}\TR{h}%
  }
\pstree{\TR{b}}
  {\TR{e}\TR{f}\TR{g}\TR{h}%
  }
\pstree{\TR{c}}
  {\TR{e}\TR{f}\TR{g}\TR{h}%
  }
\pstree{\TR{d}}
  {\TR{e}\TR{f}\TR{g}\TR{h}%
  }
}
```

A l'aide de cet exemple, donner le code de l'arbre suivant :

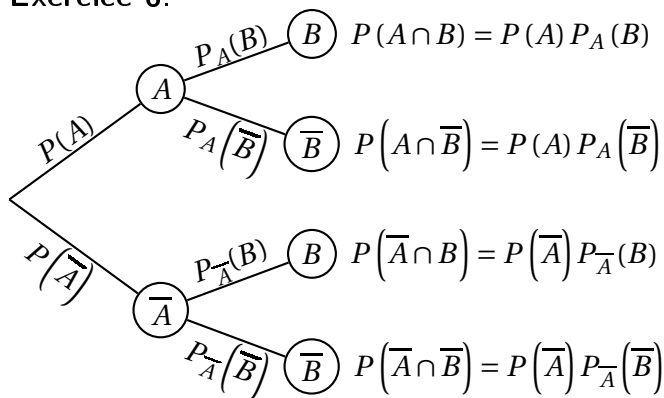


**Exercice 5.**

Dénombrement des mots de longueur 3 écrits sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a; b\}$ .

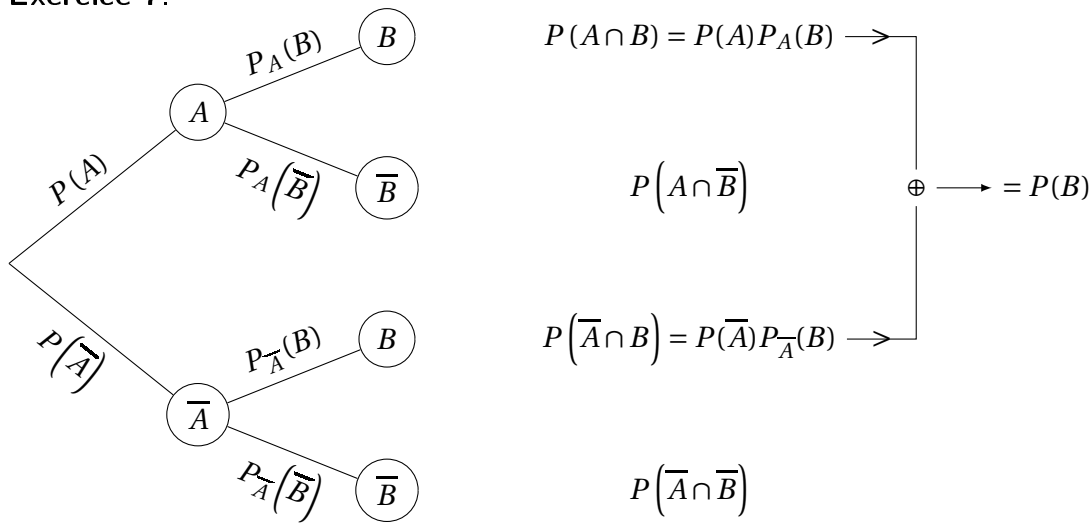


**Exercice 6.**



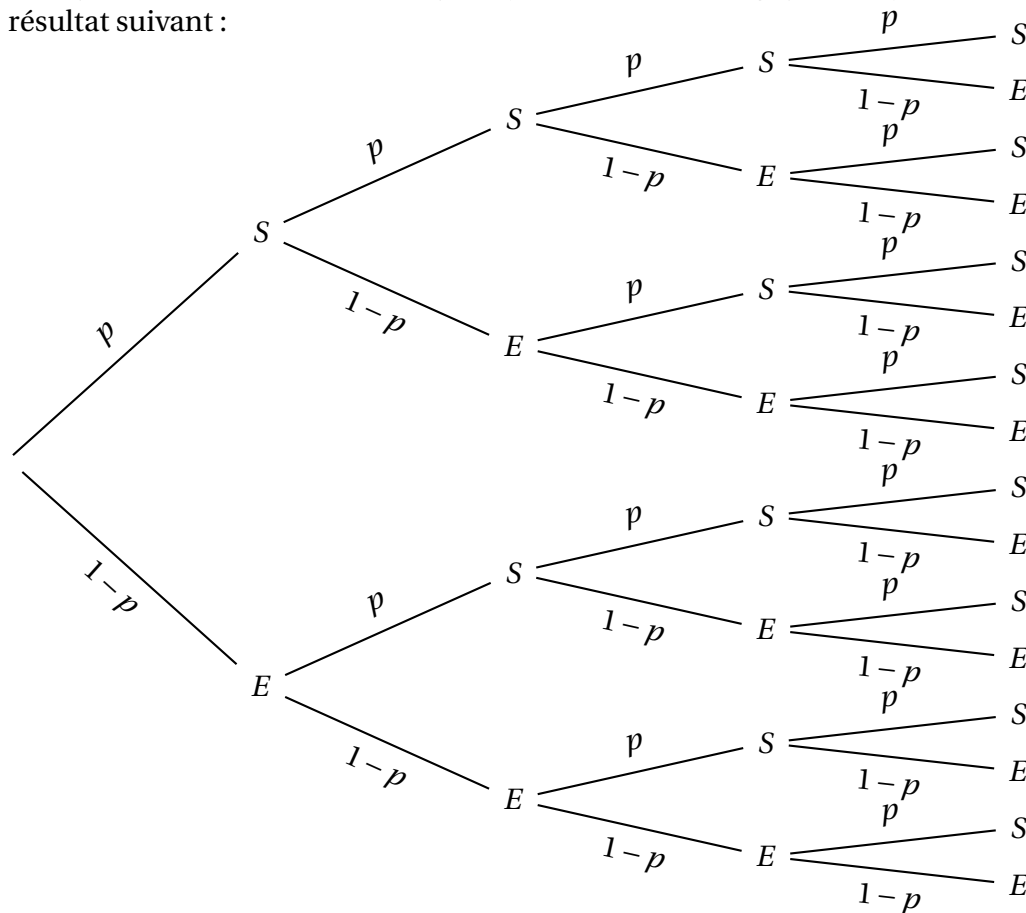


Exercice 7.



Exercice 8.

Charger le code proposé à la page <http://melusine.eu.org/syracuse/pstricks/20060429-jcc/> et produire le résultat suivant :

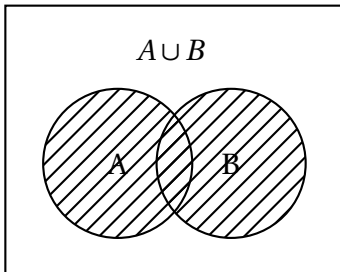




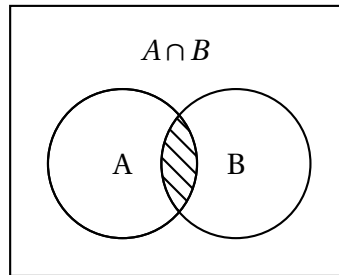
### 3 Diagrammes de Venn

Exercice 9.

*Réunion*



*Intersection*





## 4 Des solutions

### Exercice 1.

```

\begin{align}
V\left( X \right)
&= \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2 \\
&= \sum_i p_i \left( x_i - \left( \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) \right)^2 \\
P\left( A \right)
&= \sum_{k=1}^n P\left( A \cap B_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n P_{B_k}\left( A \right) P\left( B_k \right)
\end{align}

```

ce qui donne :

$$V(X) = \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2 \quad (1)$$

$$= \sum_i p_i \left( x_i - \left( \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) \right)^2 \quad (2)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^n P_{B_k}(A) P(B_k) \quad (4)$$

Pour les mêmes formules sans numérotation des lignes, on utilisera `\begin{align*}\end{align*}`

### Exercice 2.

```

\[\forall\ \left( n,p \right) \in \mathbb{N}^2
\text{ , } 1 \leqslant p \leqslant n-1
\text{ : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \]
```

### Exercice 3.

On tire une carte dans un jeu de 32, l'univers est

```

\[\Omega = \left\{ R \heartsuit, D \diamondsuit, S \spadesuit, \dots \right\}
```

### Exercice 4.

```

\scalebox{0.5}{
\pstree[levelsep=4.5cm,treeseq=0.15cm,treemode=R]{\Tr{}}
{\pstree{\TR{1}}}
{\pstree{\TR{1}}}
}
```

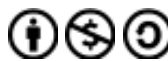


```

        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{-1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
}
\pstree{\TR{0}}
{\pstree{\TR{1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{-1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
}
\pstree{\TR{0}}
{\pstree{\TR{1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{-1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
}
\pstree{\TR{-1}}
{\pstree{\TR{1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{0}}
}

```





```

        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
\pstree{\TR{-1}}
        {\TR{1}\TR{0}\TR{0}\TR{-1}%
        }
}
}
}

```

**Exercice 5.**Avec `pst-tree` :

Quel est le nombre de mots de longueur 3 écrits sur l'alphabet

```

 $\mathcal{A} = \left\{ a; b \right\}$ 
\pstree[treemode=R]{\Tr{}}
{\pstree{\Tcircle{a}}
  {\pstree{\Tcircle{a}}
    {\Tcircle{a}~[tnpos=r]{$aaa$}\Tcircle{b}~[tnpos=r]{$aab$}}
  \pstree{\Tcircle{b}}
    {\Tcircle{a}~[tnpos=r]{$aba$}\Tcircle{b}~[tnpos=r]{$abb$}}}
\pstree{\Tcircle{b}}
  {\pstree{\Tcircle{a}}
    {\Tcircle{a}~[tnpos=r]{$baa$}\Tcircle{b}~[tnpos=r]{$bab$}}
  \pstree{\Tcircle{b}}
    {\Tcircle{a}~[tnpos=r]{$bba$}\Tcircle{b}~[tnpos=r]{$bbb$}}}}

```

Avec `TIKZ` :

```

\begin{tikzpicture}
\tikzstyle{level 1}=[level distance=2.5cm, sibling distance=4cm, shape=circle]
\tikzstyle{level 2}=[level distance=2cm, sibling distance=2cm, shape=circle]
\tikzstyle{level 3}=[level distance=2cm, sibling distance=1cm, shape=circle]
\tikzstyle{level 4}=[level distance=1cm]
\node[coordinate]{}[grow=right]
child{node[draw]{b}
  child{node[draw]{b}
    child{node[draw]{b} child{node{bbb} edge from parent[draw=none]}}
    child{node[draw]{a} child{node{bba} edge from parent[draw=none]}}}
  child{node[draw]{a}
    child{node[draw]{b} child{node{bab} edge from parent[draw=none]}}
    child{node[draw]{a} child{node{baa} edge from parent[draw=none]}}}}
child{node[draw]{a}
  child{node[draw]{b}
    child{node[draw]{b} child{node{abb} edge from parent[draw=none]}}
    child{node[draw]{a} child{node{aba} edge from parent[draw=none]}}}
  child{node[draw]{a}
    child{node[draw]{b} child{node{aab} edge from parent[draw=none]}}
    child{node[draw]{a} child{node{aaa} edge from parent[draw=none]}}}}}}

```



```
\end{tikzpicture}
```

### Exercice 6.

Avec `pst-tree` :

```
% pour poser l'étiquette parallèlement à l'arête :
\psset{nrot=:U}
\pstree[treemode=R]{\Tr{}}
% \naput[labelsep=0.1pt] : étiquette sur l'arête à une distance 0.1pt de l'arête :
{\pstree{\Tcircle{$A$}\naput[labelsep=0.1pt]{$P(A)$}}
{\Tcircle{$B$}\naput[labelsep=0.1pt]{$P_{A}(B)$}}
% \nbput[labelsep=0.1pt] : étiquette sous l'arête à une distance 0.1pt de l'arête :
\Tcircle{$\overline{B}$}\nbput[labelsep=0.1pt]{$P_{A}\left(\overline{B}\right)$}}
\pstree{\Tcircle{$\overline{A}$}\nbput[labelsep=0.1pt]{$P\left(\overline{A}\right)$}}
{\Tcircle{$B$}\naput[labelsep=0.1pt]{$P_{\overline{A}}(B)$}}
\Tcircle{$\overline{B}$}\nbput[labelsep=0.1pt]
{$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$}} }
```

L'arbre de conditionnement avec les formules en bout de branche ( $P(A \cap B) = \dots$ ) :

```
\psset{nrot=:U}
\pstree[treemode=R]{\Tr{}}
{\pstree{\Tcircle{$A$}\naput[labelsep=0.1pt]{$P(A)$}}
{\Tcircle{$B$}~[tnpos=r]{$P\left(A\cap B\right) =
P\left(A\right) P_{A}\left(B\right) $}}
\naput[labelsep=0.1pt]{$P_{A}(B)$}}
\Tcircle{$\overline{B}$}~[tnpos=r]{$P\left(A\cap \overline{B}\right) =
P\left(A\right) P_{A}\left(\overline{B}\right) $}}
\nbput[labelsep=0.1pt]{$P_{A}\left(\overline{B}\right)$}}
\pstree{\Tcircle{$\overline{A}$}\nbput[labelsep=0.1pt]{$P\left(\overline{A}\right)$}}
{\Tcircle{$B$}~[tnpos=r]{$P\left(\overline{A}\cap B\right) =
P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}\left(B\right) $}}
\naput[labelsep=0.1pt]{$P_{\overline{A}}(B)$}}
\Tcircle{$\overline{B}$}
~[tnpos=r]{$P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right) =
P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) $}}
\nbput[labelsep=0.1pt]{$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$}} }
```

Avec `TIKZ` :

```
\begin{tikzpicture}
\tikzstyle{level 1}=[level distance=2.5cm, sibling distance=4cm]
\tikzstyle{level 2}=[level distance=2.5cm, sibling distance=2cm]
\tikzstyle{level 3}=[level distance=2cm]
\node[coordinate]{}[grow=right]
child{node[circle,draw]{$\overline{A}$}}
child{node[circle,draw]{$\overline{B}$}}
child[white]{node[black]{$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$}}
```



```

    edge from parent node[below, sloped]
  {$P_{\overline{A}} \left( \overline{B} \right) $} }
  child {node [ circle , draw ] {$B$}
    child [ white ] {node [ black ] {$P \left( \overline{A} \cap B \right) $}}
    edge from parent node [ above , sloped ] {$P_{\overline{A}} \left( B \right) $} }
edge from parent node [ below , sloped ] {$P \left( \overline{A} \right) $} }
child {node [ circle , draw ] {$A$}
  child {node [ circle , draw ] {$\overline{B}$}
    child [ white ] {node [ black ] {$P \left( A \cap \overline{B} \right) $}}
    edge from parent node [ below , sloped ] {$P_A \left( \overline{B} \right) $}}
  child {node [ circle , draw ] {$B$}
    child [ white ] {node [ black ] {$P \left( A \cap B \right) $}}
    edge from parent node [ above , sloped ] {$P_A \left( B \right) $}} }
edge from parent node [ above , sloped ] {$P \left( A \right) $} } ;
\end{tikzpicture}

```

**Exercice 7.**

```

% pour étiquette parallèle à l'arête :
\psset{nrot=:U}
% début arbre :
\pstree[treemode=R]{\Tr{}}
{\pstree{\Tcircle{$A$}\naput[labelsep=0.1pt]{$P(A)$}}
{\Tcircle{$B$}~[tnpos=r]{$P \left( A \cap B \right) =
P \left( A \right) P_A \left( B \right) $}\rnode{noeud1}{}}
\naput[labelsep=0.1pt]{$P_A(B)$}
\Tcircle{$\overline{B}$}~[tnpos=r]{$P \left( A \cap \overline{B} \right) =
P \left( A \right) P_A \left( \overline{B} \right) $}
\nbput[labelsep=0.1pt]{$P_A \left( \overline{B} \right) $}}
\pstree{\Tcircle{$\overline{A}$}\nbput[labelsep=0.1pt]{$P \left( \overline{A} \right) $}}
{\Tcircle{$B$}~[tnpos=r]{$P \left( \overline{A} \cap B \right) =
P \left( \overline{A} \right) P_{\overline{A}} \left( B \right) $}\rnode{noeud2}{}}
\naput[labelsep=0.1pt]{$P_{\overline{A}}(B)$}
\Tcircle{$\overline{B}$}
~[tnpos=r]{$P \left( \overline{A} \cap \overline{B} \right) =
P \left( \overline{A} \right) P_{\overline{A}} \left( \overline{B} \right) $}
\nbput[labelsep=0.1pt]{$P_{\overline{A}} \left( \overline{B} \right) $}} }
\ncbar{noeud1}{noeud2}\ncput*{$\oplus$}
\naput[nrot=0]{$\longrightarrow=P \left( B \right) $}

```

Le code TIKZ :

```

\begin{tikzpicture}[>=latex]
\tikzstyle{level 1}=[level distance=2.5cm, sibling distance=4cm]
\ tikzstyle{level 2}=[level distance=2.5cm, sibling distance=2cm]
\ tikzstyle{level 3}=[level distance=4cm]
\ tikzstyle{level 4}=[level distance=3cm]
\node[coordinate]{}[grow=right]
child {node [ circle , draw ] {$\overline{A}$}

```



```

    child {node[ circle ,draw] {$\overline {B}$}
      child [white] {node(cacb)[ black] {$P\left(\overline {A}\cap\overline {B}\right)$}}
    edge from parent node[below,sloped] {$P_{\overline {A}}\left(\overline {B}\right)$} }
    child {node[ circle ,draw] {$B$}
      child [white] {node(cab)[ black]
        {$P\left(\overline {A}\cap B\right)=P(\overline {A})P_{\overline {A}}(B)$}}
    edge from parent node[above,sloped] {$P_{\overline {A}}\left(B\right)$} }
    edge from parent node[below,sloped] {$P\left(\overline {A}\right)$} }
%
child {node[ circle ,draw] {$A$}
  child {node[ circle ,draw] {$\overline {B}$}
    child [white] {node(acb)[ black] {$P\left(A\cap\overline {B}\right)$}}
  child [white] {node(p)[ black] {$\oplus$}}
  edge from parent node[below,sloped]
  {$P_{A}\left(\overline {B}\right)$} }
  child {node[ circle ,draw] {$B$}
    child [white] {node(ab)[ black] {$P\left(A\cap B\right)=P(A)P_A(B)$}}
    edge from parent node[above,sloped] {$P_A\left(B\right)$} }
  edge from parent node[above,sloped] {$P\left(A\right)$} } ;
\draw (ab) -| (p) node[near start , sloped] {$>$};
\draw (cab) -| (p) node[near start , sloped] {$>$};
\draw[->] (p)-- +(1cm,0cm) node[right] {$=P(B)$};
\end{tikzpicture}

```

**Exercice 8.**

Le code sur melusine est le suivant :

```

\documentclass{ article }
\usepackage{pst-tree}

\makeatletter

\newcount \@Bernoudepth
\newcount \@Bernoumaxdepth

\newcommand\ Bernoutree [8] [treemode=R, nodesep=1ex, levelsep=12ex] {%
  % #2 = profondeur de l'arbre
  % #3 = nom de l'évènement réussite
  % #4 = nom de l'évènement échec
  % #5 = proba de l'évènement réussite
  % #6 = placement de #5
  % #7 = proba de l'évènement échec
  % #8 = placement de #7
  \begingroup
  % initialise paramètres
  \psset {treemode=R, nodesep=1ex, levelsep=12ex}%
  \psset {#1}%
  \@Bernoumaxdepth #2\relax

```



```

\def\@Reussite{#3}%
\def\@Echec{#4}%
\def\@probareussite{#5}%
\def\@Argreussite{#6}%
% Si pas de spécification de placement,
% on place au centre
\ifx\empty\@Argreussite
  \def\@Argreussite{0.5}%
\fi
\def\@probaechec{#7}%
\def\@Argechec{#8}
\ifx\empty\@Argechec
  \def\@Argechec{0.5}%
\fi
% Premier appel (racine vide , niveau 1)
\pstree{\TR{}}{\@Bernoutree{1}}
\endgroup
}
\newcommand\@Bernoutree[1]{%
% #1 = profondeur récursive
% initialise profondeur en cours
\@Bernoudepth #1\relax
\ifnum\@Bernoudepth=\@Bernoumaxdepth
% si la profondeur max est atteinte
% on place les deux noeuds terminaux
\TR{\@Reussite}\taput[tpos=\@Argreussite]{\@probareussite}
\TR{\@Echec}\tbput[tpos=\@Argechec]{\@probaechec}
% et c'est tout
\else
% sinon on construit récursivement
% les deux sous-arbres de niveau supérieur
\advance\@Bernoudepth \@ne
\pstree{\TR{\@Reussite}\taput[tpos=\@Argreussite]
{\@probareussite}}{\@Bernoutree{\the\@Bernoudepth}}
\pstree{\TR{\@Echec}\tbput[tpos=\@Argechec]
{\@probaechec}}{\@Bernoutree{\the\@Bernoudepth}}
\fi
}
\makeatother

\pagestyle{empty}

\begin{document}
\Bernoutree{3}{\$A}{\$ \bar{A} }{\$p\$}{0.4}{\$1-p\$}{0.2}

\Bernoutree[levelsep=18ex, treenodesize=0pt]{4}{\$R\$}{\$E\$}{\$p\$}{\$q\$}

\end{document}

```



On a dans ce cas un blocage pour des étiquettes parallèles aux arêtes. Voilà une explication de l'auteur du code : « La commande `\pstree` a une caractéristique tout à fait particulière par rapport aux autres commandes `pstricks` : elle se réserve sa propre place (les objets `pstricks` sont de dimensions nulles dans l'immense majorité des cas). Pour cela, la commande qui doit placer les légendes au niveau des liens se fait avec des `\t*put`. Avec ces commandes, les bounding box des légendes vont être prises en compte. En contre-partie, `pstricks` interdit de les faire tourner de façon automatique. C'est assez logique, sinon TeX ne pourrait pas connaître la nouvelle bounding box... elle ne peut être calculée que par l'interpréteur PostScript. On peut utiliser des commandes `\n*put` au lieu des commandes `\t*put`. On perd la prise en compte des légendes dans le calcul de la bounding box mais on gagne la possibilité de leur appliquer tous les `nrot` que l'on veut. Dans le cas présent et si on n'a pas l'idée de mettre des légendes composées de fractions de fractions ou autres amusements de mathématiciens pervers, cela ne doit pas avoir une importance considérable. D'où :

1. Changer les deux `\taput` et les deux `\tbput` de la commande `\Bernoutree` en, respectivement `\naput` et `\nbput`. 2. demander un `nrot=:U` dans la liste des arguments optionnels de `\Bernoutree` si l'on veut que les légendes soit parallèles aux traits (ou demander un `\psset{nrot=:U}` si on veut systématiquement ce comportement). Par exemple :

```
\Bernoutree[nrot=:U,levelsep=18ex,treenodesize=0pt]{4}{\SR$}{\SE$}{\p$}{\q$}
```

Jean-Côme Charpentier »

### Exercice 9.

```
\begin{pspicture}(0,-.5)(5,4.5)
  \rput(2.2,4){\it R'eunion}
  \rput(2.2,3){\A\cup B}
  \psframe(0,0)(4.5,3.6)
  \pscircle[fillstyle=hlines](1.5,1.5){1}
  \pscircle[fillstyle=hlines](3,1.5){1}
  \rput(1.5,1.5){A}
  \rput(3,1.5){B}
\end{pspicture}

\begin{pspicture}(0,-1)(5,4.5)
  \rput(2.2,4){\it Intersection}
  \rput(2.2,3){\A\cap B}
  \psclip{\pscustom{\pscircle(1.5,1.5){1}}\pscustom{\pscircle(3,1.5){1}}}
    \psframe[fillstyle=vlines](0,0)(4,3)
  \endpsclip
  \psframe(0,0)(4.5,3.6)
  \pscircle(1.5,1.5){1}
  \pscircle(3,1.5){1}
  \rput(1.5,1.5){A}
  \rput(3,1.5){B}
\end{pspicture}
```