|  |  |
| --- | --- |
|  | **Olympiades inter-académiques de****mathématiques** |

**Classes de quatrième**

**Concours René Merckhoffer**

**Mardi 25 mars 2025**

**Durée de l’épreuve : 2 heures**

**Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.**

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu’ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

|  |
| --- |
|   |
|  |  |  |

*Avec le partenariat de*

**Exercice 1**

**Mur de jetons**

Jérémy dispose d’une boîte de jetons. Cette boîte contient six types de jetons :



La boîte comprend un nombre important de jetons de chaque type.

Jérémy s’amuse à empiler des jetons pour former des murs triangulaires en suivant les principes suivants.

* Chaque étage contient un nombre impair de jetons, inférieur de deux à l’effectif de l’étage en dessous.
* Les jetons d’un même étage sont de même type.
* L’étage le plus haut contient un unique jeton.

Voici ci-contre un exemple de mur de jetons à quatre étages que Jérémy a construit.

On appelle *force d’un mur* la somme des points de ce mur de jetons.
Par exemple, la force du mur ci-contre est 38.

1. Parmi les deux murs de jetons construits ci-dessous, quel est celui qui a la plus grande force ?

|  |  |
| --- | --- |
| Une image contenant dé  Description générée automatiquement avec une confiance faible |  |
| Mur n°1 à trois étages | Mur n°2 à quatre étages |

1. Proposer un mur de jetons à quatre étages de force 48.
2. Proposer trois murs de jetons à trois étages tels que la force de l’un d’eux soit égale à la moyenne des forces des deux autres.
3. Déterminer tous les murs de jetons à trois étages de force 20 que l’on peut construire.

**Exercice 2**

**Un logo**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB=2$ cm et $BC=4$ cm.

On note $O$ le milieu du segment $\left[BC\right]$ et $I$ le milieu du segment $\left[AD\right]$.

Les droites $(BD)$ et $(AO)$ se coupent en un point noté $E$.

Les droites $(AC)$ et $(DO)$ se coupent en un point noté $F.$

Les droites $(BD)$ et $(AC)$ se coupent en un point noté $G$.

Les droites $(IC)$ et $(BD)$se coupent en un point noté $H$.

1. Faire une figure
2. Déterminer l’aire du triangle $BOG$.
3. Déterminer la nature du quadrilatère $AICO.$
4. Démontrer que les triangles $BEO$ et $DIH$ sont égaux.
5. Démontrer que la hauteur issue de $H$ dans le triangle $BHC $est le double de la hauteur issue du $E$ dans le triangle $BEO$.
6. En déduire l’aire du quadrilatère $OFGE$.

**Exercice 3**

**Décomposition**

Un nombre entier positif peut être décomposé en somme de nombres entiers positifs.

On appelle *score* d’une décomposition le produit des termes de la décomposition.

Par exemple, si on écrit $7=2+1+4$, le score de cette décomposition est égal à $2×1×4=8$.

On peut aussi écrire $7=1+6$, le score de cette décomposition est alors égal à $1×6=6$.

1. Trouver une décomposition de $11$ dont le score est égal à :
	1. $28$.
	2. $1$.
	3. $5$.
	4. $48$.
2. Le meilleur score que l’on peut obtenir en décomposant $11$ est $54$. Trouver une décomposition qui permet de l’obtenir.
3. René a calculé le score d’une décomposition de $11$ dans laquelle un des termes est $1$. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une décomposition de $12$ dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par René.
4. **a.**  Anissa a calculé le score d’une décomposition d’un nombre entier positif $m$ dans laquelle un des termes est 5. Est-il toujours possible de trouver une décomposition de $m$ dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par Anissa ?

 **b**. De façon générale, expliquer pourquoi, lorsqu’un des termes d’une décomposition d’un nombre est supérieur ou égal à 5, il est possible de trouver une autre décomposition de ce nombre avec un meilleur score.

1. Calculer le meilleur score que l’on peut obtenir en décomposant :
	1. $58$.
	2. $59$.
	3. $60$.

**Exercice 4**

**Une opération surprenante**

Lilou et Yacine sont tous les deux passionnés de mathématiques.

Lilou dit à Yacine : « regarde, j’ai inventé une nouvelle opération étonnante ».

Yacine est très intrigué. Lilou lui explique alors le fonctionnement de son invention : « je prends deux nombres entiers relatifs $x$ et $y$, puis je note $x∇y$ le nombre défini par $x∇y=x^{2}-xy$ ».

Elle ajoute : « souviens-toi que $x^{2}=x×x$ et $xy=x×y$  ».

Yacine, curieux, décide de tester cette nouvelle opération : « d’accord, j’essaie, si je prends $x=2$ et $y=3$, j’obtiens $2∇3=2^{2}-2×3$ c’est-à-dire $2∇3=4-6$ donc $–2 $». Lilou lui dit : « oui, tu as compris ! ».

Le but de cet exercice est d’étudier l’opération $∇$ créée par Lilou.

1. Vérifier que $3∇5=-6$.
2. Considérons $x$ et $y$ deux nombres entiers et **négatifs**.

Le signe de $x∇y$ est-il le même que celui de $x×y$ ?

1. Est-ce que l’égalité $x∇y=y∇x$ est vraie quels que soient les nombres entiers relatifs 𝑥 et 𝑦 ?
2. Soit $x$ un nombre entier relatif.
**a**. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ a-t-on $x∇0=0∇x$ ?
**b**. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ a-t-on $x∇1=x$?
3. Soit $x$ et $y$ deux nombres entiers relatifs. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ et $y$ a-t-on $x∇y=1$ ?