|  |  |
| --- | --- |
|  | **Olympiades inter-académiques de**  **mathématiques** |

**Classes de quatrième**

**Concours René Merckhoffer**

**Mardi 25 mars 2025**

**Durée de l’épreuve : 2 heures**

**Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.**

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu’ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

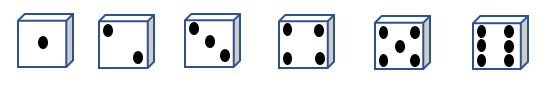
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
|  |  |  |

*Avec le partenariat de*

**Exercice 1**

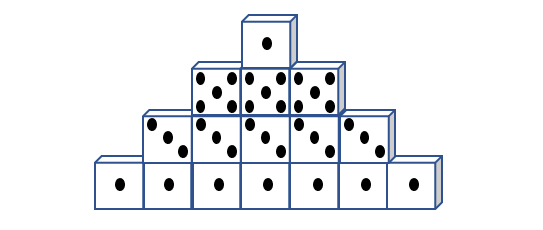
**Mur de jetons**

Jérémy dispose d’une boîte de jetons. Cette boîte contient six types de jetons :



La boîte comprend un nombre important de jetons de chaque type.

Jérémy s’amuse à empiler des jetons pour former des murs triangulaires en suivant les principes suivants.

* Chaque étage contient un nombre impair de jetons, inférieur de deux à l’effectif de l’étage en dessous.
* Les jetons d’un même étage sont de même type.
* L’étage le plus haut contient un unique jeton.

Voici ci-contre un exemple de mur de jetons à quatre étages que Jérémy a construit.

On appelle *force d’un mur* la somme des points de ce mur de jetons.   
Par exemple, la force du mur ci-contre est 38.

1. Parmi les deux murs de jetons construits ci-dessous, quel est celui qui a la plus grande force ?

|  |  |
| --- | --- |
| Une image contenant dé  Description générée automatiquement avec une confiance faible |  |
| Mur n°1 à trois étages | Mur n°2 à quatre étages |

1. Proposer un mur de jetons à quatre étages de force 48.
2. Proposer trois murs de jetons à trois étages tels que la force de l’un d’eux soit égale à la moyenne des forces des deux autres.
3. Déterminer tous les murs de jetons à trois étages de force 20 que l’on peut construire.

**Exercice 2**

**Un logo**

Soit un rectangle tel que cm et cm.

On note le milieu du segment et le milieu du segment .

Les droites et se coupent en un point noté .

Les droites et se coupent en un point noté

Les droites et se coupent en un point noté .

Les droites et se coupent en un point noté .

1. Faire une figure
2. Déterminer l’aire du triangle .
3. Déterminer la nature du quadrilatère
4. Démontrer que les triangles et sont égaux.
5. Démontrer que la hauteur issue de dans le triangle est le double de la hauteur issue du dans le triangle .
6. En déduire l’aire du quadrilatère .

**Exercice 3**

**Décomposition**

Un nombre entier positif peut être décomposé en somme de nombres entiers positifs.

On appelle *score* d’une décomposition le produit des termes de la décomposition.

Par exemple, si on écrit , le score de cette décomposition est égal à .

On peut aussi écrire , le score de cette décomposition est alors égal à .

1. Trouver une décomposition de dont le score est égal à :
   1. .
   2. .
   3. .
   4. .
2. Le meilleur score que l’on peut obtenir en décomposant est . Trouver une décomposition qui permet de l’obtenir.
3. René a calculé le score d’une décomposition de dans laquelle un des termes est . Expliquer pourquoi il est possible de trouver une décomposition de dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par René.
4. **a.**  Anissa a calculé le score d’une décomposition d’un nombre entier positif dans laquelle un des termes est 5. Est-il toujours possible de trouver une décomposition de dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par Anissa ?

**b**. De façon générale, expliquer pourquoi, lorsqu’un des termes d’une décomposition d’un nombre est supérieur ou égal à 5, il est possible de trouver une autre décomposition de ce nombre avec un meilleur score.

1. Calculer le meilleur score que l’on peut obtenir en décomposant :
   1. .
   2. .
   3. .

**Exercice 4**

**Une opération surprenante**

Lilou et Yacine sont tous les deux passionnés de mathématiques.

Lilou dit à Yacine : « regarde, j’ai inventé une nouvelle opération étonnante ».

Yacine est très intrigué. Lilou lui explique alors le fonctionnement de son invention : « je prends deux nombres entiers relatifs  et , puis je note  le nombre défini par ».

Elle ajoute : « souviens-toi que  et  ».

Yacine, curieux, décide de tester cette nouvelle opération : « d’accord, j’essaie, si je prends et , j’obtiens c’est-à-dire donc ». Lilou lui dit : « oui, tu as compris ! ».

Le but de cet exercice est d’étudier l’opération  créée par Lilou.

1. Vérifier que .
2. Considérons et deux nombres entiers et **négatifs**.

Le signe de  est-il le même que celui de  ?

1. Est-ce que l’égalité  est vraie quels que soient les nombres entiers relatifs 𝑥 et 𝑦 ?
2. Soit un nombre entier relatif.   
   **a**. Pour quelle(s) valeur(s) de a-t-on  ?   
   **b**. Pour quelle(s) valeur(s) de a-t-on ?
3. Soit et deux nombres entiers relatifs. Pour quelle(s) valeur(s) de et a-t-on  ?