**Éléments de solution**

**Exercice 1 (pour tous)**

1., 2. et 3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| Les diviseurs de |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

4. *a.* Chaque diviseur de figure deux fois dans la somme, donc

*b.*  fait apparaître comme produit de nombres positifs, d’où le résultat.

*c.* Application au cas

*d.* Dans l’écriture de , on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l’inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu’une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de : .

*b.* Les seules valeurs admissibles pour sont donc 1 ou . est donc un nombre premier.

*c.* Réciproquement, si est premier, ses diviseurs sont 1 et , leur somme est et leur effectif 2, donc l’égalité (\*) est satisfaite.

**Exercice 2 (spécialistes)**

**A. Quelques exemples**

**1. *a.*** et , donc est décomposable.

On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d’entiers inférieurs :

sont supérieurs à 49. Donc n’est pas décomposable.

***b.*** et donc est décomposable.

**2. *a.*** Dire que est décomposable, c’est dire qu’il existe des entiers et tels que

et , ce qui nécessite 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant et (et aussi ).

***b.*** Dire que est décomposable, c’est dire qu’il existe des entiers et tels que et , ce qui nécessite que . Comme et qu’on parle d’entiers positifs, il s’ensuit que . Les trois possibilités sont donc et On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.

**3. *a.*** donne la réponse, est décomposable.

***b.*** donne la réponse : est décomposable.

***c.*** Une égalité telle que ne saurait avoir lieu que pour , sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour , on obtient

**B. Une étude des nombres décomposables**

**1. *a.*** Si est décomposable, il existe des entiers et tels que et . Comme et sont inférieurs ou égaux à , on en déduit , et .

Est-il possible que soit égal à ?

Si cela était, il existerait un entier tel que , ou encore , qui conduit à 1, impossible dans notre hypothèse. Donc

***b***. Les entiers décomposables sont inférieurs ou égaux à d’après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour et . et sont, quel que soit décomposables (avec les couples et ).

La partie A a aussi résolu le cas de comme non décomposable. Il ne reste donc que et qui le soient.

**2.** Supposons que pour un couple il existe deux entiers et tels que :

Nécessairement, et comme l’unicité est démontrée.

**3. *a.*** On peut écrire (en utilisant directement ), ou encore .

L’existence du couple induit le fait que est solution de cette équation.

***b.*** Réciproquement, s’il existe un entier compris entre 0 et tel que soit solution de cette équation, alors en posant on revient bien au système .

***c.*** Essayons d’écrire différemment et pour faire apparaître l’équation précédente :

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur 1, précédé de , entier inférieur à

**4.** Calculons

(la lettre qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à ). Le dernier facteur est bien inférieur à (c’est ).

**5.** Posons et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier compris entre et tel que . On a donc , qui assure que est un multiple de D’où on tire que , qui est égal à est lui aussi un multiple de et donc 1 en est un aussi. Impossible.

**6.** On a montré que les entiers décomposables sont inférieurs à D’après la question précédente, – un entier dans le cas où est pair – ne l’est pas. Par ailleurs, si est décomposable, l’est aussi. On peut donc regrouper les entiers décomposables par paire . Il y en a donc un nombre pair.

**7.**  Posons . La condition nécessaire et suffisante : il existe une entier inférieur ou égal à tel que indique que divise , et comme est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont

**8.** La condition Montre que les nombres tels que soit décomposable sont des diviseurs de . Il y en a donc un nombre fini.

**Exercice 3 (non spécialistes)**

**1. *a.*** proposition fausse car, par exemple,  et ce n’est pas une fraction égyptienne.

***b.*** proposition vraie car pour tous les entiers et non nuls, et est un entier non nul.

***c.*** proposition fausse car, par exemple, et ce n’est pas une fraction égyptienne.

**2. *a.*** On peut proposer les deux décompositions et . On en déduit qu’il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d’un nombre rationnel.

***b.***  et

**3. *a.*** Comme la base de la pyramide est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en , la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est .

Donc qui est une fraction égyptienne. On en déduit que est une pyramide égyptienne.

***b.*** Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, .

Si ou , alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a ou et, dans les deux cas, . Donc ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc n’est pas une pyramide égyptienne.

On en déduit que si est une pyramide égyptienne alors et .

***c.***  est une pyramide égyptienne si et seulement s’il existe un entier naturel non nul tel que .

Or, en réduisant au même dénominateur,

Donc est une pyramide égyptienne si et seulement s’il existe un entier naturel non nul tel que

***d.*** Par ce qui précède, est une pyramide égyptienne si et seulement s’il existe un entier naturel non nul tel que qui s’écrit

Pour tous entiers naturels et non nuls, est un nombre pair.

Si et sont des nombres impairs alors est aussi un nombre impair.

L’égalité est impossible si et sont impairs.