**Éléments de solution**

**Exercice 1**

***Pyramides d’oranges***

****1. *a.*** Chaque orange repose sur 4 oranges ; comme sur la photo, l’étage $E\_{2}$ comporte 4 oranges.

***b.*** Chacune des quatre oranges de l’étage $E\_{2}$repose sur quatre nouvelles oranges, dont une est partagée par les quatre initiales, deux par deux des oranges initiales et une « de coin » ne sert qu’à une des oranges initiales. Au total $1+2×2+4=9$ .

***c.*** À chaque étage, les oranges sont disposées en carré, un nombre entier d’oranges figurant chaque côté. Le processus décrit à la question précédente montre que ce nombre augmente de 1 à chaque étage. Il y a donc $10²=100$ oranges à l’étage $E\_{10}$.

***d.*** L’étage $E\_{8}$ comporte 64 oranges.

***e.*** 200 n’est le carré d’aucun entier, donc aucun étage de comporte 200 oranges.

**2.** ***a.***Une pyramide à 2 étages comporte $1+4=5$ oranges

***b.***Une pyramide à 3 étages comporte $1+4+9=14 $oranges

***c.***Une pyramide à 10 étages comporte $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385$ oranges

**3.** Dans le tableau suivant, qui donne le liste des effectifs par étage jusqu’à $E\_{7}$, on cherche des entiers supérieurs à 14 et de somme 140.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$n$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $$n²$$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| Effectif de $E\_{n}$ | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | 91 | 140 |

On trouve que 10 pyramides à 3 étages conviennent, comme deux pyramides à 5 étages et une à 4

**Exercice 2**

***Coupole***

****

**1.** L’angle $\hat{AOD}$ mesure 60° (le tiers de 180°). Le triangle AOD est isocèle ([OA] et [OD] sont des rayons d’un même cercle) et il a un angle de 60°. Il est donc équilatéral.

**2.** Le triangle CSD a pour côtés [SD] et [SC], qui sont les images de [AD] et [BC] respectivement, dans les symétries de centres D et C. Le troisième côté, [CD], est un côté du triangle équilatéral ODC (lui aussi a pour côtés deux rayons du cercle et un angle de 60°). Le triangle CSD a donc trois côtés de même longueur. Il est équilatéral.

**3.** Les aires des segments circulaires sous-tendus par les segments [SD] et [SC] équilibrent celles des segments circulaires sous-tendus par [AD] et [BC]. L’aire cherchée est donc celle du triangle équilatéral ASB. Cette aire $A$ est donc :

$$A=\frac{1}{2}×11×\frac{11\sqrt{3}}{2} m²$$

 $A=\frac{121\sqrt{3}}{4} m²$

**Exercice 3**

***Carrés magiques***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$$$ | $$$$ | 8 |
| $$$$ | $$$$ | 1 |
| $$$$ | $$$$ | 6 |

**1.** La somme des entiers compris entre 1 et 9 est 45. La constante d’un tel carré est donc $15$.

La dernière colonne n’entre pas en contradiction avec ce premier résultat. Ouf ! Le nombre 9 ne peut se trouver que sur la ligne $L\_{2}$, car $9+8$ et $9+6$ sont supérieurs à $15$. Et sur cette ligne il ne peut occuper la position centrale pour les mêmes raisons. On complète la diagonale $D\_{1}$ par 4, puis la ligne $L\_{1}$ et la colonne $C\_{1}$, et enfin la ligne $C\_{3}.$ On contrôle pour finir (c’est une question de soin, pas de mathématiques).

**2.** Le tableau de gauche est magique, de constante 54. Celui de droite ne l’est pas ($-0,5-3,5-12,5=-16,5$ tandis que $-5,5-6,5-12,5=-24,5)$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 23 | −2 | 33 |  |  | −1,5 | −9,5 | −5,5 |
| 28 | 18 | 8 |  |  | −7,5 | −2,5 | −6,5 |
| 3 | 38 | 13 |  |  | −0,5 | −3,5 | −12,5 |

**3.** ***a.*** La constante du carré est le tiers de la somme de neuf nombres qui le constituent. Ici :

 $16x-10+ 2x-3 -2+ 4x-4+ 12x-8+ 10x-7+ 6x-5+ 8x-6+ 14x-9=72x-54$

Et donc $S=24x-18$

***b.*** Comme il y a en quelque sorte « séparation des variables », on peut chercher un carré magique $3×3$ de constante $24x$, dont une case occupée par 0, et un autre de constante $-18$… mais attention au recollement !

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$2x-3$$ | $$16x-10$$ | $$6x-5$$ |
| $$ 12x-8$$ | $$8x-6$$ | $$4x-4$$ |
| $$ 10x-7$$ | $$-2$$ | $$14x-9$$ |

À gauche, une solution possible (dans l’esprit de ce qui a été dit précédemment). On ne dit pas que c’est la seule…

**4.** ***a.***Le carré obtenu en remplaçant tous les nombres du carré initial par leurs opposés convient

 ***b.***Le carré obtenu en doublant tous les nombres du carré initial convient.

**Exercice 4**

***Chamboule-tout***

******

Sur la figure ci-contre, on a donné des noms à certains points, S, T et U étant les points de contact des carrés « horizontaux » avec le côté [SV] du carré oblique, M, N et H les projetés orthogonaux de S sur les côtés des carrés horizontaux, P le projeté de T sur [UN] et Q le projeté de U sur [VH].

Les triangles STM, TUP et UVQ sont des triangles rectangles semblables (leurs angles homologues sont égaux).

On connaît les longueurs SM = 1, TP = 4, UP = 3 et UQ = 7.

On écrit les égalités de rapports :

$\frac{VQ}{UP}=\frac{UQ}{TP}$, qui donne $VQ=\frac{21}{4}$

$\frac{TM}{UP}=\frac{SM}{TP}$ , qui donne $TM=\frac{3}{4}$

Le triangle SVH est lui aussi semblable aux trois autres et $\frac{SH}{VH}=\frac{SM}{TM} $et comme $SH=1+4+7=12$ , on en déduit que

$VH=9$. L’hypoténuse du triangle SVH mesure donc 15, et l’aire inconnue 225.

*N.B. On peut s’interroger sur le rôle des carrés d’aire 36 et 9. Du point de vue des calculs, ils ne servent à rien, mais s’ils n’étaient pas là, le grand carré blanc chuterait.*