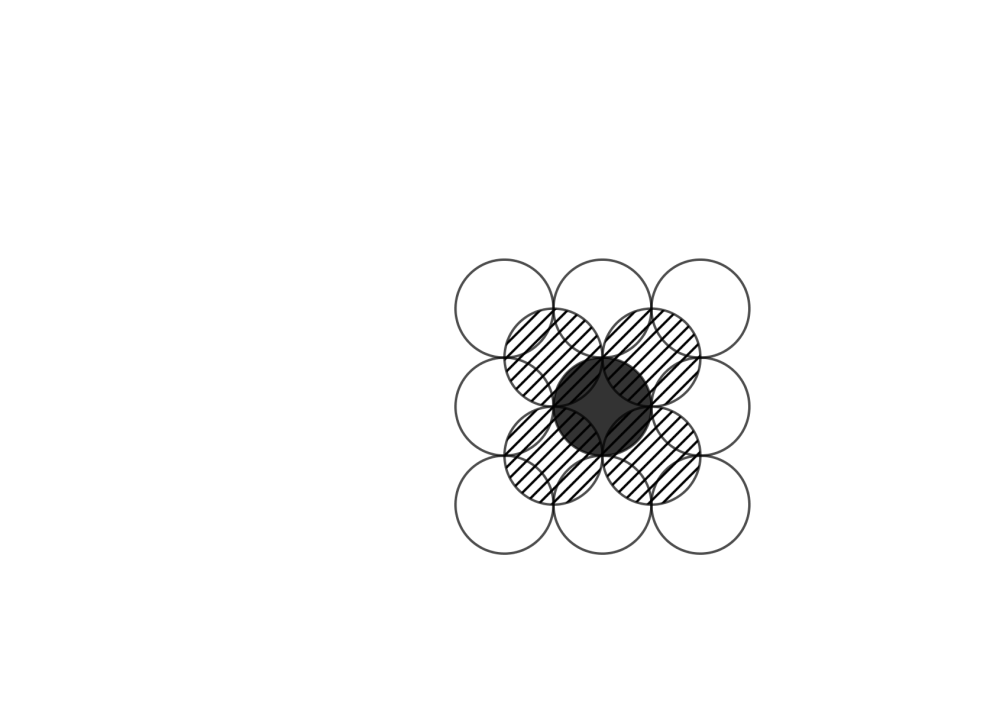
**Éléments de solution**

**Exercice 1**

***Pyramides d’oranges***

****1. *a.*** Chaque orange repose sur 4 oranges ; comme sur la photo, l’étage comporte 4 oranges.

***b.*** Chacune des quatre oranges de l’étage repose sur quatre nouvelles oranges, dont une est partagée par les quatre initiales, deux par deux des oranges initiales et une « de coin » ne sert qu’à une des oranges initiales. Au total .

***c.*** À chaque étage, les oranges sont disposées en carré, un nombre entier d’oranges figurant chaque côté. Le processus décrit à la question précédente montre que ce nombre augmente de 1 à chaque étage. Il y a donc oranges à l’étage .

***d.*** L’étage comporte 64 oranges.

***e.*** 200 n’est le carré d’aucun entier, donc aucun étage de comporte 200 oranges.

**2.** ***a.***Une pyramide à 2 étages comporte oranges

***b.***Une pyramide à 3 étages comporte oranges

***c.***Une pyramide à 10 étages comporte oranges

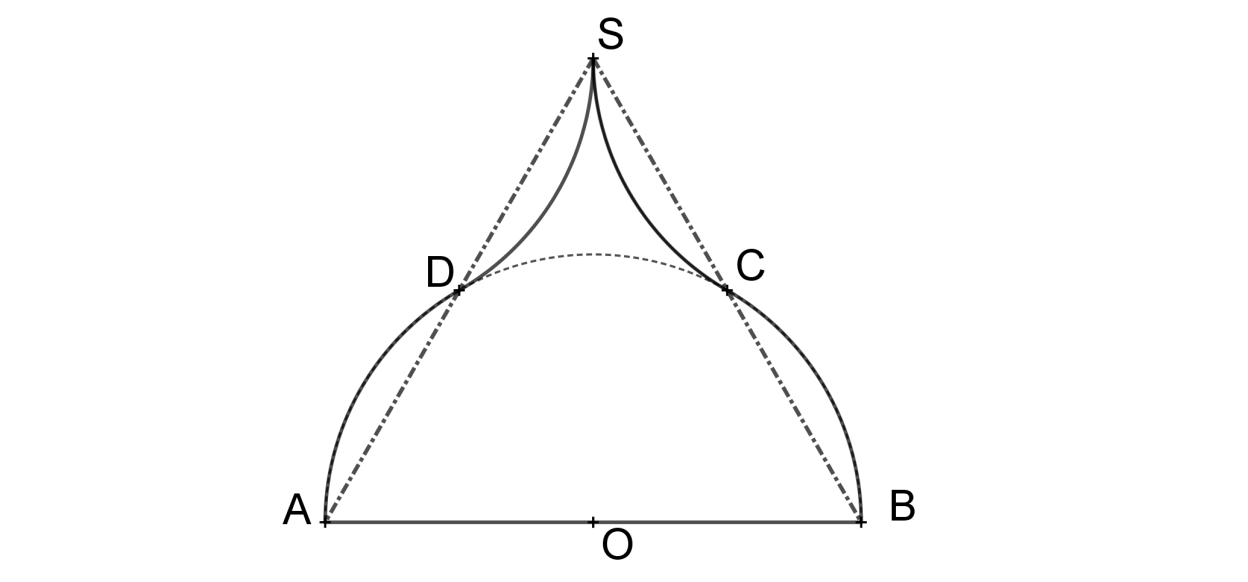
**3.** Dans le tableau suivant, qui donne le liste des effectifs par étage jusqu’à , on cherche des entiers supérieurs à 14 et de somme 140.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| Effectif de | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | 91 | 140 |

On trouve que 10 pyramides à 3 étages conviennent, comme deux pyramides à 5 étages et une à 4

**Exercice 2**

***Coupole***

****

**1.** L’angle mesure 60° (le tiers de 180°). Le triangle AOD est isocèle ([OA] et [OD] sont des rayons d’un même cercle) et il a un angle de 60°. Il est donc équilatéral.

**2.** Le triangle CSD a pour côtés [SD] et [SC], qui sont les images de [AD] et [BC] respectivement, dans les symétries de centres D et C. Le troisième côté, [CD], est un côté du triangle équilatéral ODC (lui aussi a pour côtés deux rayons du cercle et un angle de 60°). Le triangle CSD a donc trois côtés de même longueur. Il est équilatéral.

**3.** Les aires des segments circulaires sous-tendus par les segments [SD] et [SC] équilibrent celles des segments circulaires sous-tendus par [AD] et [BC]. L’aire cherchée est donc celle du triangle équilatéral ASB. Cette aire est donc :

**Exercice 3**

***Carrés magiques***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 8 |
|  |  | 1 |
|  |  | 6 |

**1.** La somme des entiers compris entre 1 et 9 est 45. La constante d’un tel carré est donc .

La dernière colonne n’entre pas en contradiction avec ce premier résultat. Ouf ! Le nombre 9 ne peut se trouver que sur la ligne , car et sont supérieurs à . Et sur cette ligne il ne peut occuper la position centrale pour les mêmes raisons. On complète la diagonale par 4, puis la ligne et la colonne , et enfin la ligne On contrôle pour finir (c’est une question de soin, pas de mathématiques).

**2.** Le tableau de gauche est magique, de constante 54. Celui de droite ne l’est pas ( tandis que

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 23 | −2 | 33 |  |  | −1,5 | −9,5 | −5,5 |
| 28 | 18 | 8 |  |  | −7,5 | −2,5 | −6,5 |
| 3 | 38 | 13 |  |  | −0,5 | −3,5 | −12,5 |

**3.** ***a.*** La constante du carré est le tiers de la somme de neuf nombres qui le constituent. Ici :

Et donc

***b.*** Comme il y a en quelque sorte « séparation des variables », on peut chercher un carré magique de constante , dont une case occupée par 0, et un autre de constante … mais attention au recollement !

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

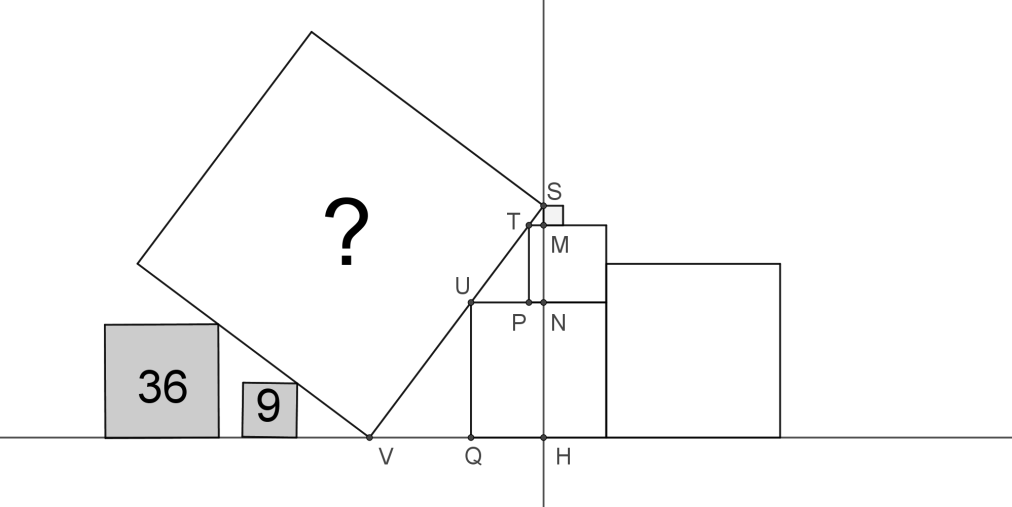
À gauche, une solution possible (dans l’esprit de ce qui a été dit précédemment). On ne dit pas que c’est la seule…

**4.** ***a.***Le carré obtenu en remplaçant tous les nombres du carré initial par leurs opposés convient

***b.***Le carré obtenu en doublant tous les nombres du carré initial convient.

**Exercice 4**

***Chamboule-tout***

******

Sur la figure ci-contre, on a donné des noms à certains points, S, T et U étant les points de contact des carrés « horizontaux » avec le côté [SV] du carré oblique, M, N et H les projetés orthogonaux de S sur les côtés des carrés horizontaux, P le projeté de T sur [UN] et Q le projeté de U sur [VH].

Les triangles STM, TUP et UVQ sont des triangles rectangles semblables (leurs angles homologues sont égaux).

On connaît les longueurs SM = 1, TP = 4, UP = 3 et UQ = 7.

On écrit les égalités de rapports :

, qui donne

, qui donne

Le triangle SVH est lui aussi semblable aux trois autres et et comme , on en déduit que

. L’hypoténuse du triangle SVH mesure donc 15, et l’aire inconnue 225.

*N.B. On peut s’interroger sur le rôle des carrés d’aire 36 et 9. Du point de vue des calculs, ils ne servent à rien, mais s’ils n’étaient pas là, le grand carré blanc chuterait.*