Académie de Lyon

TraAM 2014-2015 :

Développer avec les TICE l'appétence des élèves pour la résolution de problèmes en mathématiques

Séquence Réseau le plus court

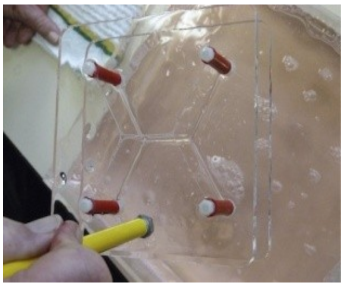
Groupe académique

Dominique Bernard
Jean-Louis Bonnafet
Daniel Di Fazio
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

RESEAU LE PLUS COURT ENTRE QUATRE VILLES.

Comment relier par des routes ou des câbles ou des tuyaux… quatre villes situées dans un même plan, aux sommets d'un carré ou d'un rectangle ? Quelle est la route la plus courte reliant ces quatre villes ?

Un film de savon peut nous mettre sur la voie…



PRESENTATION

Thème : problème classique d'optimisation avec prise d'initiative

Niveau : seconde (pour la modélisation), première S ou terminale S ; en classe entière.

Place dans la progression en seconde: après les configurations planes, les généralités sur les variations d'une fonction.

Place dans la progression en première ou terminale S : A la fin du chapitre sur les applications de la dérivation, en classe ou en accompagnement personnalisé (approfondissement) .

Compétences travaillées :

Chercher : analyser un problème
Modéliser : traduire à l'aide de configurations géométriques, de fonctions la situation étudiée. Utiliser, élaborer une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation. Valider ou invalider le modèle.
Représenter : choisir le cadre algébrique, géométrique adapté pour traiter le problème, changer de registre.
Calculer : effectuer un calcul à l'aide d'un logiciel de calcul formel (première S) et exercer l'intelligence du calcul (détermination des angles).
Raisonner : Effectuer des inférences pour obtenir de nouveaux résultats, confirmer une conjecture.
Communiquer.

OBJECTIFS

Il s'agit d'un travail de recherche d'une configuration pour minimiser une distance (réseau de Steiner). Très rapidement les élèves ont des idées mais pas la solution. La vidéo permet de relancer la recherche sur une nouvelle piste et soutient l'activité des élèves.

L'objectif en seconde est d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour étudier la nouvelle configuration induite par la vidéo, faire émerger le choix d'une variable et déterminer la fonction étudiée. La recherche de la valeur minimale est graphique. La mesure des angles aux points triples se fait en utilisant le logiciel. Les élèves doivent vérifier que le chemin trouvé est de longueur inférieure à tous ce qu'ils ont proposé avant.

En première ou terminale, après l'étude graphique, une étude des variations de la fonction « longueur de la route » en utilisant la dérivation permet de conclure (la variable peut être une longueur ou un angle en terminale) et il est alors facile de démontrer que les valeurs des angles aux points triples sont bien de 120°.

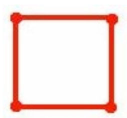
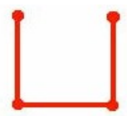
SCENARIO

Matériel : une vidéo qui n'est présentée qu'après un premier travail de recherche.

En groupes ou en classe entière : présentation de l'énoncé.

Comment relier par des routes ou des câbles ou des tuyaux… quatre villes situées dans un même plan, aux sommets d'un carré? Quelle est la route la plus courte reliant ces quatre villes ?

Première recherche « à la main » en groupes, et restitution en classe qui devrait donner ceci parmi d'autres idées possibles :

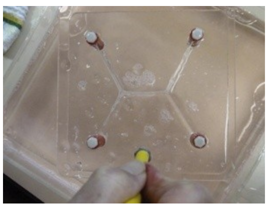
En salle informatique :

Monter une image ou une vidéo qui peut motiver une recherche dans une autre direction utilisant les TICE.

http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html

http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article419&lang=fr

Ici nous allons utiliser la propriété qu'a un film de savon de minimiser son aire. On prend deux plaques de plexiglas que l'on lie par quatre boulons tout en faisant attention qu'elles ne soient pas trop proches l'une de l'autre. Lorsque l'on plonge cette construction dans l'eau savonneuse et que l'on l'en ressort délicatement, un film de savon vient joindre nos quatre boulons en essayant de minimiser son aire. Mais la largeur entre les plaques étant constante, le problème de minimisation de la surface devient équivalent à celui de la minimisation de la longueur de la trace de notre film sur le plexiglas.



En seconde, avec un logiciel de géométrie dynamique. Enoncé élèves

Avec un logiciel de **géométrie dynamique**, réaliser une figure représentant la situation observée (on choisira de représenter les quatre villes aux sommets d'un carré de côté 10 cm avec un segment intermédiaire de longueur 2*a* variable).
Rechercher pour quelle longueur du segment intermédiaire la longueur totale du chemin est minimale. Comparer aux solutions calculées en classe entière.
Faire afficher les angles aux points triples.

<u>Prolongements possibles en devoir maison</u> : que le passe-t-il si les villes sont aux quatre coins d'un rectangle ?

<u>Niveau première S : avec un logiciel de géométrie dynamique et calcul formel.</u>
<u>Enoncé élèves</u>

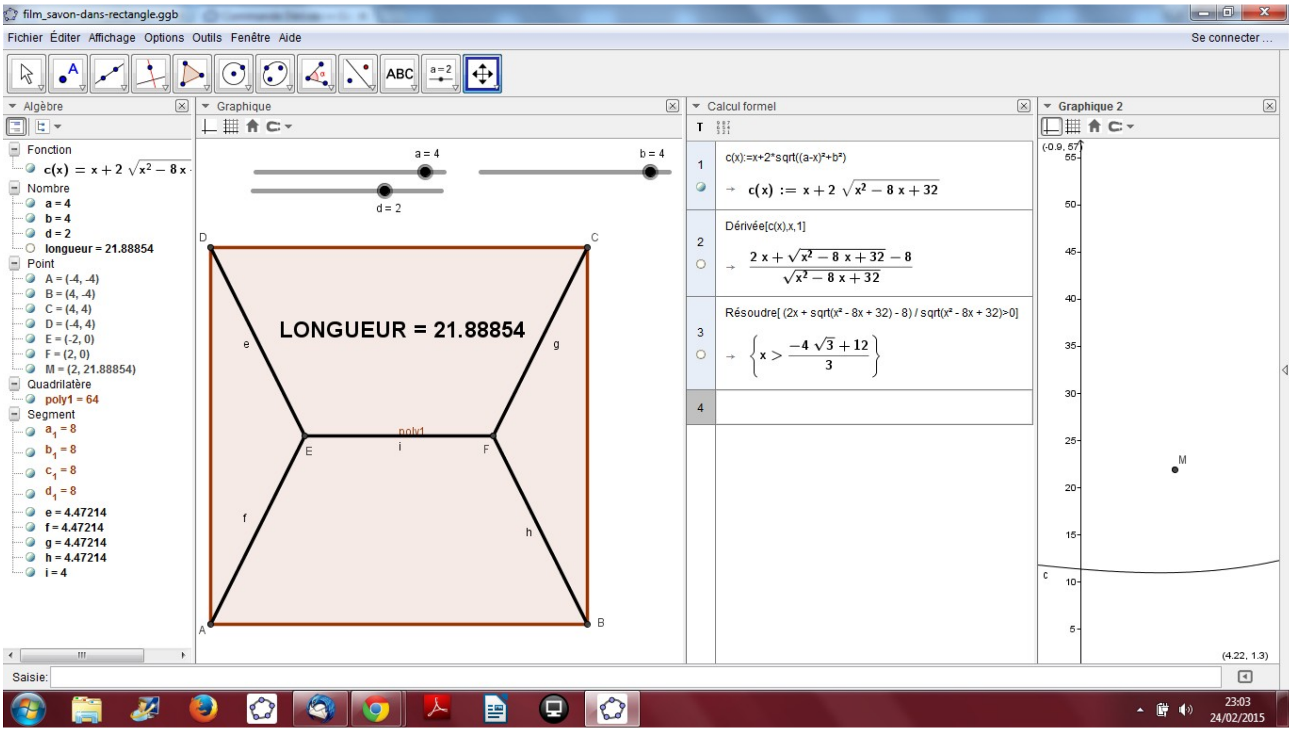
Avec un logiciel de **géométrie dynamique**, réaliser une figure représentant la situation observée (on choisira de représenter les quatre villes aux sommets d'un carré de côté 10 cm avec un segment intermédiaire de longueur 2*a*) et rechercher pour quelle longueur du segment intermédiaire la longueur totale du chemin est minimale, comparer aux solutions calculées en classe entière et faire apparaître alors les angles aux points triples.

Déterminer en fonction de *a* la longueur totale du chemin.

Démontrer, à l'aide d'un logiciel de **calcul formel**, qu'il existe une valeur de *a* qui rend cette longueur minimale.

Déterminer alors la mesure des angles aux points triples.

<u>Prolongements possibles en devoir maison</u> : que le passe-t-il si les villes sont aux quatre coins d'un rectangle ?



Mise en œuvre :

1h présentation du sujet et travail en demi-classes, salle informatique.
1h pour restituer et achever le travail en classe entière dans le cas du carré.
1h d'accompagnement personnalisé pour approfondissement des calculs.

RETOUR D'EXPERIENCE

Seconde
Quelques difficultés dans la réalisation de la figure (prise en main du curseur avec geogebra), le choix de la variable. Il faut trouver la fonction à étudier, faire varier la longueur du segment intermédiaire et faire afficher la longueur de la trajectoire avec suffisamment de précision pour trouver le minimum !
Les élèves ont été heureux de constater que ce travail aboutissait bien à trouver une longueur inférieure à celles qu'ils avaient trouvées avec d'autres configurations.

Première S (non testé en terminale S)

La justification du minimum dans ce cas de figure nécessite l'utilisation du calcul formel pour dériver des fonctions du type racine $\sqrt{u}$ et résoudre des inégalités du type $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$. Travail inachevé en une heure, terminé à la maison et repris en classe entière.

Remarque : la formule de dérivation des fonction du type $\sqrt{u}$ a été démontrée ensuite en accompagnement personnalisé à partir de la dérivée des fonctions u^2 .. puis la résolution des inéquations $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ a entraîné un important travail sur les implications et les équivalences...travail motivé par l'idée de retrouver les résultats donnés par le calcul formel.
Travail de calcul en classe entière pour démontrer que les angles aux points triples font 120° !

Réinvestissement en devoir maison : Que se passe-t-il dans la cas d'un rectangle ? Il y a deux configurations possibles... laquelle choisir ?

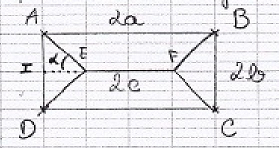
Travail copieux... certains se sont contentés des conjectures sur logiciel de géométrie dynamique, d'autres ont utilisé en plus le calcul formel et quelques uns ont cherché à faire les démonstrations et ont comparé les deux configurations.

Exemples de copies d'élèves :

Dérivation avec Xcas

2) Supposons avec un rectangle.

1er cas : Rectangle "couché" donc $a > b$



a et b sont des paramètres

c est une variable

$L = 2c + 4 \times FC$

$FC^2 = CI^2 + FI^2 = b^2 + (a-c)^2 \iff FC = \sqrt{b^2+(a-c)^2}$

d'où $L = 2c + 4 \times \sqrt{b^2+(a-c)^2}$

$L(c) = 2c + 4 \times \sqrt{b^2+(a-c)^2}$, $L(x) = 2x + 4\sqrt{b^2+(a-x)^2}$

On cherche $L'(x)$. $\iff L(x) = 2x + 4\sqrt{b^2+a^2-2ax+x^2}$

avec Xcas $L'(x) = 2 + \dfrac{4(x-a)}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}$

Résolution de L'(x) = 0 par calculs.... sans tenir compte des équivalences

Résoudre $L'(x) = 0$

$$2 + \frac{4(x-a)}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}} = 0$$

$$4(x-a) = -2\sqrt{b^2+(a-x)^2}$$

$$2(x-a) = -\sqrt{b^2+(a-x)^2}$$

$$4(x-a)^2 = b^2 + (a-x)^2$$

or $(x-a)^2 = (a-x)^2$

$$3(x-a)^2 = b^2$$

$$(x-a)^2 = \frac{b^2}{3}$$

$x - a = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$ ou $x - a = \dfrac{-b}{\sqrt{3}}$

$x = \dfrac{b}{\sqrt{3}} + a$ ou $x = \dfrac{-b}{\sqrt{3}} + a$

Le calcul du minimum avec Xcas peut présenter une allure rébarbative ...

```
18 f(x):=2*x+4* sqrt((a-x)²+b²);
// Interprète f
// Attention: a,b, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la compilation f
```

$$x \rightarrow 2*x+4*\left(\sqrt{(a-x)^2+b^2}\right)$$

```
19 deriver(f(x))
```

$$-\frac{4*(a-x)}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}+2$$

```
20 solve(-4*(a-x) / sqrt(b^2+(a-x)^2))+2=0
```

$$\left[\frac{-|b|+(\sqrt{3})*a}{\sqrt{3}}\right]$$

```
21 f((-b+sqrt(3)*a) / sqrt(3)))
```

$$\frac{2*((\sqrt{3})*a-b)}{\sqrt{3}}+4*\left(\sqrt{b^2+\left(-\frac{(\sqrt{3})*a-b}{\sqrt{3}}+a\right)^2}\right)$$

Que l'on retrouve dans des copies d'élèves qui en majorité n'ont pas su simplifier :

Avec Xcas, on trouve $L'(x)=0$ pour

$x=\dfrac{-|b|+a\sqrt{3}}{3} \iff x=\dfrac{-\sqrt{b^2}+a\sqrt{3}}{3}$ (voir feuille Xcas)

Or $b>0$ car c'est l'ordonnée de A, situé au dessus de l'axe des abscisses

DONC $x=\dfrac{-b+a\sqrt{3}}{3}$

$$L\left(\frac{-b+a\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2(a\sqrt{3}-b)}{\sqrt{3}}+4\sqrt{b^2+\left(-\frac{a\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}}+a\right)^2}$$

Deux élèves sur 34 ont choisi de résoudre le problème en prenant un angle pour variable. Les fonctions trigonométriques ne figurant pas au programme de première S, un seul de ces deux élèves a mené les calculs jusqu'au bout en allant chercher les fonctions dérivées sur Internet !! En classe aurait-il utilisé le calcul formel ??

D'où $f(\theta) = \frac{2\ell}{\sin\theta} + L - \frac{\ell\cos\theta}{\sin\theta}$

$\Leftrightarrow f(\theta) = \ell\left(\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right) + L$

On étudie les variations de la fonction f afin de déterminer pour quelle valeur de θ elle atteint son minimum.

On calcule donc sa dérivée.

Soit $f'(\theta) = \ell\left(\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right)'$

$\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$ est de la forme $\frac{u(\theta)}{v(\theta)}$ avec :

Ce n'est plus qu'au programme de terminale en effet !

$u(\theta) = 2-\cos\theta$ donc $u'(\theta) = \sin\theta$

$v(\theta) = \sin\theta$ donc $v'(\theta) = \cos\theta$

(Valeurs trouvées à l'aide d'internet)

Donc $f'(\theta) = \ell\frac{\sin^2\theta - \cos\theta(2-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\Leftrightarrow f'(\theta) = \ell\frac{\sin^2\theta - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\Leftrightarrow f'(\theta) = \ell\frac{1-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ (car $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

Étudier le signe de f' revient à étudier le signe de $1-2\cos\theta$.

$1 - 2\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Vous résolvez $f'(\theta) = 0$ mais ce n'est pas une étude de signe de $f'(\theta)$

Dommage !

D'où

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	‖	↘	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↗	

Les conjectures avec le logiciel ne géométrie dynamique ne conduisent pas toujours à une résolution du problème par calculs :

Constat sans argument :	Ainsi, le modèle horizontal est dans tous les cas, celui qui donne le trajet le plus court. Par ailleurs, il est important de constater qu'avec des dimensions de l'ordre de 10×18, le modèle vertical prend un tracé ayant une allure de croix, or, nous avons vu précédemment que cette dernière est toujours plus grande que l'allure en sablier. ⇒ Modèle horizontal plus efficace que le verticale dans ?

Évaluation du travail maison :

Le travail était individuel mais aurait pu être un travail de groupe. Certaines copies avaient des ressemblances, en particulier, la simplification du calcul du minimum de la longueur cherchée n'a été réussie par quasiment personne..

Chaque élève a avancé dans le problème à la mesure de ses compétences en calcul et selon le temps consacré !

La correction proposée en classe (voir ci-dessous) a permis de revoir une bonne partie du programme d'analyse de l'année et les élèves ont été intéressés par le fait que l'on pouvait trouver la solution avec des approches distinctes.

Ce travail n'a pas été noté. Une grille d'auto-évaluation leur a été proposée pour faire le point sur leur travail en plus de l'étude de la correction de leur copie.

Auto évaluation proposée aux élèves après correction des copies : cocher les cases selon le travail réalisé.

1. ¦ Dans le cas $a \geq b$ conjectures avec geogebra
2. ¦ Calcul de la longueur dans la configuration diabolo debout (détermination de L(x))
3. ¦ Calcul de la dérivée de L(x) avec ¦ Xcas? ¦ En utilisant les formules?
4. ¦ Résolution de l'équation $L(x)=0$ avec ¦ Xcas? ¦ En détaillant les étapes du calcul?
5. ¦ Résolution de l'inéquation $L(x) \geq 0$ avec ¦ Xcas? ¦ En détaillant les étapes du calcul ?
6. ¦ Dans le ou les cas précédents, les équivalences sont-elles justifiées ?
7. ¦ Calcul de la valeur exacte du minimum de L, ¦ sans simplifier ¦ en simplifiant soit $Lm=2a+2\sqrt{3}b$
8. ¦ Preuves que *Lm* est bien inférieure aux valeurs trouvées dans les configurations basiques: ¦ en H (*2a* + *4b*) , ¦ en X $\left(4\sqrt{a^2+b^2}\right)$ ou ¦ en N (*4b* + *2* $\sqrt{a^2+b^2}$¿
9. ¦ Conjecture de l'angle aux points triples avec geogebra
10. ¦ Preuve que l'angle aux points triples fait bien $120°$
11. ¦ Conjectures avec la seconde configuration « diabolo couché ».
12. ¦ Expression de la longueur dans le cas du « diabolo couché» .
13. ¦ Existence d'un minimum dans cette configuration
    ¦ à condition que *a* et *b* vérifient $a \leq b\sqrt{3}$
14. ¦ Minimum atteint en $x =$ 0 si $a>b\sqrt{3}$ (dans cs cas, configuration en X)
15. ¦ Comparaison des minima obtenus dans les deux configurations $2a+2b\sqrt{3} \leq 2b+2a\sqrt{3}$
16. ¦ Conclusion.

CONCLUSION

Au final ce travail met en œuvre :

- un travail de modélisation avec choix des variables pour trouver la ou les fonctions à étudier
- l'utilisation d'outils variés : logiciel de géométrie, de calcul formel
- un travail sur la mise en œuvre de la dérivation pour rechercher un minimum

- des résolutions d'équations ou inéquations avec radicaux qui posent des problèmes d'équivalences...
- un travail sur la trigonométrie dans le triangle rectangle

Ce même travail pourrait être donné en terminale S car il fait travailler en outre :
- La dérivation des fonctions composées du programme
- Les fonctions trigonométriques.

C'est aussi l'occasion de travailler certains points de logique.

Intérêt de la vidéo : le fait que la vidéo ait été réalisée par un groupe d'élèves de la classe a fait forte impression sur les autres élèves et a excité leur curiosité sur le sujet. D'autre part c'est la vidéo qui a amené cette modélisation et favorisé l'entrée dans un problème plus complexe qu'il n'y paraît à priori. !