Certaines démonstrations font appel à des techniques, des méthodes ou des modèles qu'il est sans doute préférable d'évoquer en amont, afin de limiter les difficultés à « affronter » pour les élèves.

On peut envisager un parcours, qui peut se dérouler sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois, qui permettrait, pour une démonstration donnée, d'aborder celle-ci dans les meilleures conditions.

Proposition d'un parcours qui pourrait être suivi avant d'aborder la démonstration suivante :

Position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$.

Table des matières

1 Eléments de logique

1.1 Véracité d'une affirmation

A,B,C et D sont quatre points du plan.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- A_1 : « **Si** $ABCD$ est un parallélogramme **alors** $AB = CD$ »
- A_2 : « **Si** $ABCD$ est un rectangle et $AB = BC$ **alors** $ABCD$ est un carré »

1.2 Réciproque

1. Enoncer la réciproque de l'affirmation A_1. Est-elle vraie ? Justifier.
2. Même question avec l'affirmation A_2.

1.3 Propositions équivalentes

L'affirmation A_2 est vraie, sa réciproque l'est également.
On dit alors que les propositions :
« *$ABCD$ est un rectangle et $AB = BC$* » **et** « *$ABCD$ est un carré* » sont **équivalentes** et on note :

$ABCD$ est un rectangle et $AB = BC$ **si et seulement si** $ABCD$ est un carré

✎ On peut retenir que « **si et seulement si** » signifie « **équivaut à** »

Exercice :
Tom a écrit : « $ABCD$ est un losange **si et seulement si** les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires ».
Es-tu d'accord avec lui ?

➢ **Notation :** le symbole $\Longleftrightarrow$
Lorsque les propositions sont des équations ou des inéquations, « **si et seulement si** » pourra se noter « $\Longleftrightarrow$ »
Par exemple, on écrira : $x+7=12 \quad \Longleftrightarrow \quad x=5$

Exercice :
x est un nombre réel.

1. Parmi les propositions suivantes, préciser celles qui sont équivalentes :

   P_1 : $x^2=9$ P_2 : $x=3$ P_3 : $x=-3$

   P_4 : $5=x+8$ P_5 : $x=3$ ou $x=-3$ P_6 : $4x=12$

2. A-t-on $x^2 \geqslant 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant 3$? Justifier.

1.4 Rituels

voir fichier RituelsLogique.pdf ci-joint, à lire en mode *présentation*.

2 Signe d'une expression

2.1 Signe d'une expression numérique

En observant les calculs suivants, déterminer leur signe. Compléter les pointillés par « >0 » ou « <0 » :

1. $87-113$ ...... **2.** $945-453$ ...... **3.** $-5\times(-468)$ ...... **4.** $-45\times(471-158)$ ......
5. $37\times58-(-96)$ ...... **6.** $(-87)^2$ ...... **7.** $45\times51\times(-26)$ ...... **8.** $-429-863$ ......
9. $(89-258)(158-69)$ ...... **10.** -87^2 ...... **11.** $(-854-485)(354-485)$ ...... **12.** $20\pi-60$ ......

2.2 Signe de la différence de deux nombres

a et b sont des nombres réels. Compléter le tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{a}$	8	12	0,9	3	$\frac{1}{4}$
$\boldsymbol{b}$	7	15	0,88	π	0,25
Comparer $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$	$a \dots b$				
Valeur exacte de $\boldsymbol{a-b}$					
Signe de $\boldsymbol{a-b}$					

a est strictement supérieur à b si et seulement si le signe de la différence de a et de b est ....
Avec les symboles mathématiques : ....

$$\boldsymbol{a>b} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En effet :
Si $\boldsymbol{a>b}$, en retranchant b dans chaque membre de l'inégalité, on obtient $a-b>b-b$ c'est-à-dire $\boldsymbol{a-b>0}$
Réciproquement,
Si $\boldsymbol{a-b>0}$, en ajoutant b dans chaque membre de l'inégalité, on obtient $a-b+b>0+b$ c'est-à-dire $\boldsymbol{a>b}$

On a également : $\boldsymbol{a<b} \iff$ .... $\boldsymbol{a=b} \iff$ ....

2.3 Signe d'une expression littérale

Déterminer, *si possible*, le signe des expressions suivantes, sachant que :
- x et y sont deux nombres **strictement positifs** tels que $\boldsymbol{x<y}$
- z un nombre **strictement négatif**.

1. $x-y$ ...... **2.** $y-x$ ...... **3.** $-3x$ ...... **4.** $-5z$ ......
5. $z+y$ ...... **6.** xyz ...... **7.** $xy-z$ ...... **8.** xz^2 ......
9. z^2-xy ...... **10.** $z(x-y)$ ...... **11.** $(x-y)(x+y)$ ...... **12.** $\dfrac{x-y}{xy}$ ......

2.4 Rituels

voir fichier RituelsSigneDuneExpression.pdf ci-joint, à lire en mode *présentation*.

3 Un modèle pour comparer des nombres : étudier le signe de leur différence

3.1 Premiers exemples

3.1.1 Exemple 1

Problème : comparer le double et le carré d'un nombre réel positif.

Es-tu d'accord avec ces deux affirmations ? Justifie ta réponse :

- « *Le carré de tout nombre réel positif est strictement supérieur à son double* » : ....
- « *Il existe un nombre réel positif dont le carré est égal à son double* » : ....

x est un nombre réel positif. On note $\boldsymbol{D}$ le double de x et $\boldsymbol{C}$ le carré de x.

1. **Conjecture :**

   Complète l'algorithme ci-dessous écrit en deux langages :

PSEUDO-CODE

Saisir un réel positif x

$D \leftarrow$ ......
$C \leftarrow$ ......

Si .... **alors** afficher $D = C$

Sinon si .... **alors** afficher $D < C$

Sinon afficher $D > C$

PYTHON

```
def saisir(x):
    D = ....
    C = ....
    if ........ :  print("D = C")
    elif ........ :  print("D < C")
    else :  print("D > C")
```

2. **Formalisation :**

> ☞ **Point méthode :**
> Sachant que $C - D > 0 \iff C > D$, la méthode consiste à étudier le signe de $C - D$ suivant les valeurs de x pour comparer C et D.

a. $C - D$ étant une différence de deux nombres positifs, on va la « transformer » en produit pour étudier son signe :

Factorise $C - D$, puis détermine le signe du produit obtenu suivant les valeurs de x.

b. Conclure.

3.1.2 Exemple 2

Problème : comparer le triple et la moitié du carré d'un nombre réel positif.

x est un nombre réel **positif**. On note $\boldsymbol{T}$ le triple de x et $\boldsymbol{M}$ la moitié du carré de x.

1. **Conjecture :**

   - A l'aide d'un tableur, Joanne a calculé T et M avec 10 valeurs de x.
     Quelles formules a-t-elle saisies dans les cellules **B2** et **C2** et copiées vers le bas pour afficher les valeurs de T et M ?

     ....

   - Après observation, propose une comparaison de T et M suivant les valeurs de x.

	A	B	C
1	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{M}$
2	0	0	0
3	1	3	0,5
4	2	6	2
5	3	9	4,5
6	4	12	8
7	5	15	12,5
8	6	18	18
9	7	21	24,5
10	8	24	32
11	9	27	40,5

2. **Formalisation**

   a. Factorise $M - T$, puis détermine le signe du produit obtenu suivant les valeurs de x.

   b. Conclure.

3.2 A vous de jouer

3.2.1 Exercice 1

x est un nombre réel **positif**. On note A et B les nombres définis par : $\boldsymbol{A = 3x^2}$ et $\boldsymbol{B = 45x}$

Problème : comparer A et B suivant les valeurs de x.

1. **Conjecture :** Utilise ta calculatrice afin d'émettre, *si possible*, une conjecture sur la comparaison de A et de B suivant les valeurs de x.

2. **Formalisation :**

   a. Factorise $A - B$, puis détermine le signe du produit obtenu suivant les valeurs de x.

   b. Conclure.

3.2.2 Exercice 2

x est un réel **positif**. On note A et B les nombres définis par : $\boldsymbol{A = 0,4x^2}$ et $\boldsymbol{B = 98x}$

Comparer les nombres A et B suivant les valeurs de x.

3.3 Pour aller plus loin

3.3.1 Exercice 3

x et y sont deux nombres réels **positifs**. On note A et B les nombres définis par : $\boldsymbol{A = x^2}$ et $\boldsymbol{B = 3xy}$

Problème : comparer A et B suivant les valeurs de x et y.

1. **Conjecture :** Calcule A et B pour des valeurs de x et de y de ton choix afin d'émettre, *si possible*, une conjecture sur la comparaison de A et de B suivant les valeurs de x et de y.

2. **Formalisation :**

   a. Factorise $A - B$, puis détermine le signe du produit obtenu suivant les valeurs de x et de y.

   b. Conclure.

3.3.2 Exercice 4

x et y sont deux nombres réels **positifs**. On note A et B les nombres définis par : $\boldsymbol{A = x^2 + y^2}$ et $\boldsymbol{B = 2xy}$

Comparer les nombres A et B suivant les valeurs de x et de y.

3.3.3 Exercice 5

x est un réel **strictement positif**.

Dans chaque cas, comparer les nombres A et B suivant les valeurs de x :

1. $\boldsymbol{A = 2x^2 + x + 25}$ $\quad$ $\boldsymbol{B = (x+5)^2}$

2. $\boldsymbol{A = x^3}$ $\quad$ $\boldsymbol{B = 16x}$

3. $\boldsymbol{A = x}$ $\quad$ $\boldsymbol{B = \dfrac{1}{x}}$

4 Position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$

4.1 Conjecture

4.2 Démonstration

5 Prolongement

5.1 Variations d'une fonction

Ce parcours peut-être suivi également avant d'aborder les démonstrations des sens de variations des fonctions de référence (comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour deux nombres a et b appartenant à un intervalle donné)

5.2 Position relative de deux courbes, d'une courbe et de l'une de ses tangentes

Pour étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions f et g, on compare $f(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x en étudiant le signe de leur différence.

5.3 Suites

Pour étudier le sens de variation d'une suite, la méthode la plus courante est de comparer u_n et u_{n+1} en étudiant le signe de leur différence.

5.4 Signe d'une fonction dérivée

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, on étudie le signe de sa fonction dérivée.