Irrationalité de $\sqrt{2}$

Seconde

9 mai 2019

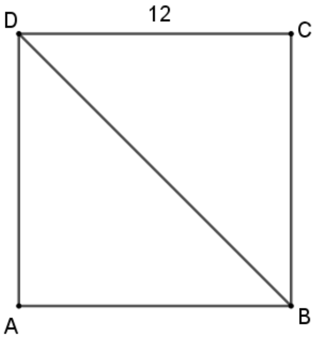
Comment motiver la nécessité de démontrer en mathématiques ?

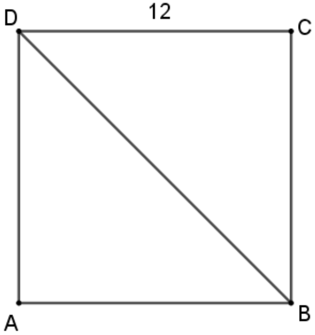
Privilégier les énoncés ouverts avant d'institutionnaliser.

Susciter le débat.

Trouver une accroche en posant un problème que les élèves ne savent pas résoudre avec les outils connus.

Proposer régulièrement des «trompe-l'œil».


12
D
C
A
B



Calculatrice interdite

A-t-on $\sqrt{2} = \dfrac{17}{12}$?

DEFI

Activité de groupe : *calculatrice autorisée*

1. Trouver une fraction plus proche de $\sqrt{2}$ que $\dfrac{17}{12}$.
2. Trouver une fraction la plus proche possible de $\sqrt{2}$.

DEFI

Activité de groupe : *calculatrice autorisée*

1. Trouver une fraction plus proche de $\sqrt{2}$ que $\dfrac{17}{12}$.
2. Trouver une fraction la plus proche possible de $\sqrt{2}$.

Après un temps de recherche donné :

- Chaque groupe propose sa réponse, en verbalisant la démarche utilisée.
- Détermination de la meilleure approximation

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des décimaux (*algorithme de balayage avec Python*)

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des décimaux (*algorithme de balayage avec Python*)

```
a=1.414213562
pas=10**(-15)

while a**2 < 2:
    a=a+pas

print(a-pas," ",a)
```

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des rationnels (*tableur*)

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des rationnels (*tableur*)

A	B
a	b
1	2
1 1/3	1 1/2
1 2/5	1 3/7
1 7/17	1 5/12
1 12/29	1 17/41
1 41/99	1 29/70
1 70/169	1 99/239
1 239/577	1 169/408

On utilise l'égalité :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

FORMALISATION

Raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$,

où p et q sont des entiers naturels et $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

FORMALISATION

<u>Raisonnement par l'absurde :</u> on suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$,

où p et q sont des entiers naturels et $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

- **Méthode 1 :** On aboutit à une contradiction en utilisant une disjonction de cas sur le chiffre des unités de p et q.

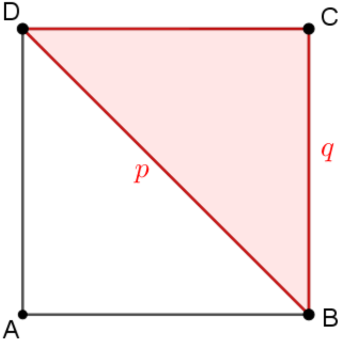
FORMALISATION

Raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$,

où p et q sont des entiers naturels et $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

- **Méthode 1 :** On aboutit à une contradiction en utilisant une disjonction de cas sur le chiffre des unités de p et q.
- **Méthode 2 :** On aboutit à une contradiction en raisonnant sur la parité
(*prérequis :* contraposée, le carré d'un nombre impair est impair)

Méthode 3 : Le professeur ramène le problème à un problème géométrique



On suppose que BCD est le plus petit triangle isocèle rectangle dont les côtés ont des longueurs entières, d'hypoténuse p.

On aboutit à une contraction en trouvant un triangle isocèle rectangle, de dimensions entières inférieures à celles de BCD.

DIFFERENCIER

- On peut envisager que tous les élèves cherchent la démonstration 1, présentée sous forme d'un exercice très guidé.
- Les démonstrations 2 et 3 peuvent être préparées et présentées par un groupe d'élèves au groupe classe, sous forme d'exposés.

1. Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
2. Etudier la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

- Lister les prérequis
- Identifier les difficultés à anticiper
- Trouver une accroche pour motiver la nécessité de démontrer

1. Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

1. Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Existe-t-il un entier n tel que 10^n soit divisible par 3 ?

1. Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

   Existe-t-il un entier n tel que 10^n soit divisible par 3 ?

   A-t-on $\dfrac{1}{3} = 0,3333333333$?

2. Etudier la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

2. Etudier la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

Prérequis : Comparer deux nombres en étudiant le signe de leur différence

2. Etudier la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

Prérequis : Comparer deux nombres en étudiant le signe de leur différence

Tom affirme :
« Tout nombre réel positif est inférieur à son carré »
Es-tu d'accord avec lui ?

2. Etudier la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

Prérequis : Comparer deux nombres en étudiant le signe de leur différence

Tom affirme :
« Tout nombre réel positif est inférieur à son carré »
Es-tu d'accord avec lui ?

Conjecture à l'aide geogebra
A l'issue de la recherche, animation projetée par l'enseignant

3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Utiliser un trompe-l'oeil

3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Utiliser un trompe-l'oeil

Défi : algorithme « TestColinéaires »

3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Utiliser un trompe-l'oeil

Défi : algorithme « TestColinéaires »

Interprétation géométrique du déterminant