

# Voronoi

## Dans les programmes

- Géométrie 1 : entretenir les acquis du collège en géométrie plane. Distance.
- Statistiques et probabilités : réalisation d'une simulation.

## 1 Des régions au hasard

Entrer le code suivant :

### Xcas

```
voronoi(A,B,C,D,n) := {
/* A,B,C,D sont des points */
/* n est un entier naturel */
local k,x,y,M,listeA , listeB , listeC , listeD , liste ;
listeA := []; listeB := []; listeC := []; listeD := [];
pour k de 1 jusque n faire
x:=rand(0,1) ; y:=rand(0,1) ; M:=point(x,y) ;
si distance(A,M)<distance(B,M) et distance(A,M)<distance(C,M) et distance(A,M)<
distance(D,M) alors
listeA:=append(listeA , affichage(M,green)) ; fsi ;
si distance(B,M)<distance(A,M) et distance(B,M)<distance(C,M) et distance(B,M)<
distance(D,M) alors
listeB:=append(listeB , affichage(M,red)) ; fsi ;
si distance(C,M)<distance(A,M) et distance(C,M)<distance(B,M) et distance(C,M)<
distance(D,M) alors
listeC:=append(listeC , affichage(M,blue)) ; fsi ;
si distance(D,M)<distance(A,M) et distance(D,M)<distance(B,M) et distance(D,M)<
distance(C,M) alors
listeD:=append(listeD , affichage(M,yellow)) ; fsi ;
fpour ;

liste := [ affichage(A, square(A)) , affichage(B, square(B)) , affichage(C, square(C)) ,
affichage(D, square(C)) ] ;
liste := augment(liste , listeA) ;
liste := augment(liste , listeB) ;
liste := augment(liste , listeC) ;
liste := augment(liste , listeD) ;
return liste ;
} ;;
```



Tester ce programme (en entrant par exemple : voronoi(point(0.27,0.05),point(0.25,0.75),point(0.5,0.6),point(0.8,0.1),100)).

Pour de grandes valeurs de  $n$  des régions dans le carré unité semblent se dessiner.

Donner un procédé géométrique efficace de construction de ces zones sur une feuille de papier.

## 2 Chasse au trésor

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité : 1 km). On considère les points  $O(0;0)$  ;  $A(1;0)$  ;  $B(1;1)$  ;  $C(0;1)$ . On note  $R$  le point d'intersection des diagonales du quadrilatère  $OABC$ .

On sait qu'un trésor  $T$  est caché dans ce quadrilatère  $OABC$  et on sait que :

- $T$  est à une distance du rocher  $R$  qui est strictement plus grande que 0,4 km.
  - $T$  est plus proche de l'arbre  $A$  que du point  $O$ .
  - $T$  est plus éloigné du chemin  $(OA)$  que de la rivière  $(AB)$ .
  - la distance de  $T$  à l'orée de la forêt  $(CB)$  est supérieure à 0,6 km.
1. Écrire un programme sur le modèle du précédent permettant d'obtenir la zone de recherche à partir de tirages au hasard.
  2. Décrire un procédé de construction de cette zone sans tirage au hasard.

## Éléments de réponses – XCAS

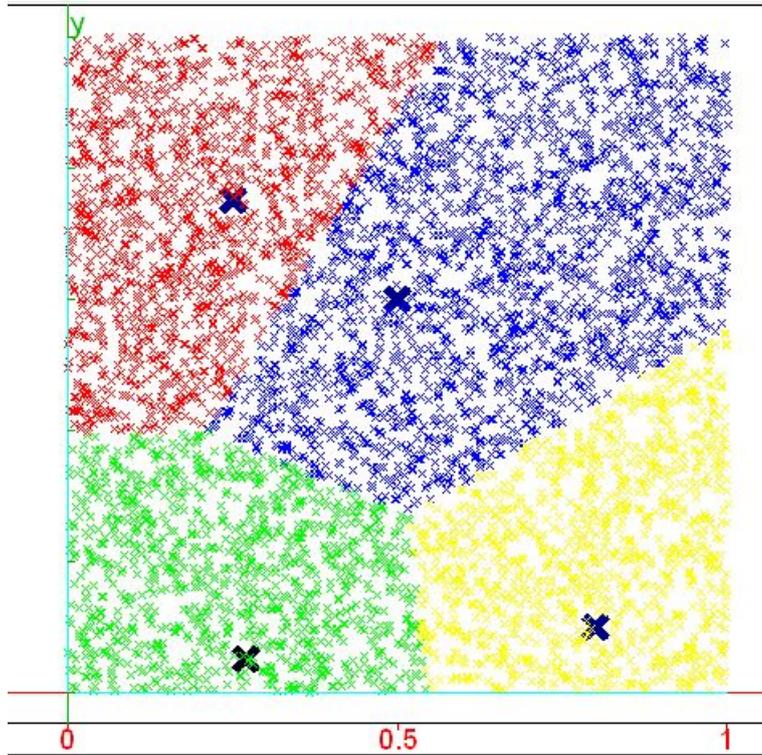
### 3 Des régions au hasard

Il s'agit ici de :

- lire un programme relativement long mais à la structure simple,
- réviser la notion de médiatrice,
- renforcer l'idée que le hasard obéit à des lois (les régions semblent, pour  $n$  grand, uniformément atteintes). *Remarque : les nombres étant ceux de la machine (donc en nombre fini), la probabilité utilisée ici peut être présentée comme une probabilité discrète.*

Commentaires

Avec `voronoi(point(0.27,0.05),point(0.25,0.75),point(0.5,0.6),point(0.8,0.1),6000)`, on a obtenu :



## 4 Chasse au trésor

Il s'agit ici :

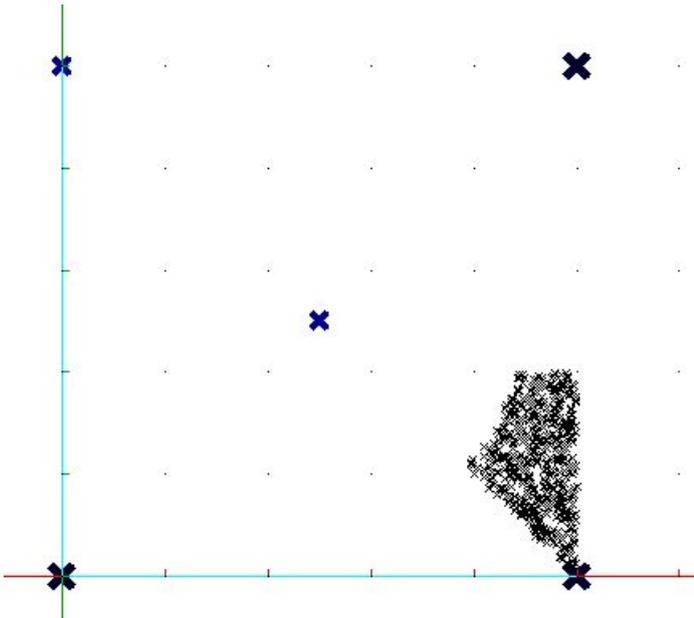
- de contraindre l'élève à faire un effort de compréhension de l'algorithme précédent en lui demandant d'en écrire un légèrement différent.
- de réviser quelques propriétés sur les distances (médiatrice, bissectrice, disque, distance d'un point à une droite).

Commentaires

### Xcas

```
tresor(n) := {
/* n est le nombre de points M tirés au hasard suivant le même procédé
de tirage que l'algorithme précédent */
local O,A,B,C,R, zone, k, x, y,M;
O:=point(0,0);A:=point(1,0);B:=point(1,1);C:=point(0,1);R:=inter_unique(segment
(O,B),segment(A,C));
zone:=[affichage(A,square(A)),affichage(B,square(B)),affichage(C,square(C)),
affichage(O,square(O)),affichage(R,square(R))];
pour k de 1 jusqu'à n faire
x:=rand(0,1);y:=rand(0,1);M:=point(x,y);
si distance(R,M)>0.4 et distance(M,O)>distance(M,A) et distance(M,droite(O,A))>
distance(M,droite(A,B))
et distance(M,droite(C,B))>0.6 alors
zone:=append(zone,M); fsi;
fpour;
return zone;
};;
```

On obtient par exemple avec tresor(10000) :



Les choix faits ici permettraient de poursuivre l'exercice par une explicitation des équations des droites intervenant.

Commentaires