MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2h)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 (tous les candidats)

PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6,1, \mathbf{8}, 4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.
3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.
4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.
a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.
b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.
5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.
6. ***Une relation de récurrence***
a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.
d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.
f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

UNE DESCENTE INFINIE

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

$$(\text{E}) : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de (E) est $(0,0,0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de **R** dans **R** définie par $P(x) = x^2 + bx + c$.
Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, $r_1$et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.

2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$
Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. ***a.*** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).

b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E).

2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?

3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0,0,0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.

2. On définit la fonction Q de **R** dans **R** par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.
Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.
b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.
c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.
d. Quel est le signe de $Q(0)$?
e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres $0, x_2$ et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.
f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :
« Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$.
L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \ldots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0, \ldots ,0)$. »

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Soient a et b deux nombres entiers.
Montrer que le nombre $a + b$ est pair si, et seulement si, a et b sont de la même parité.

Codage d'un message

Un *message* est ici un nombre M codé sous la forme d'un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des « bits », c'est-à-dire des nombres ne pouvant valoir que 0 ou 1. Le nombre M que représente le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4), appelé aussi demi-octet *d'information*, vaut par définition :

$$M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$$

Par exemple, le code $(0,0,1,1)$ représente le nombre $M = 12$ puisque $12 = 0 + 2 \times 0 + 4 \times 1 + 8 \times 1$.

2. ***a.*** Quel est le message M que code le quadruplet $(1,0,0,1)$?
b. Trouver un code qui représente $M = 10$. Trouver un code qui représente $M = 15$.
c. Peut-on trouver un code pour représenter $M = 20$?
d. Quels sont les différents messages possibles ?

Un message est parfois altéré (on dit aussi « corrompu ») lors de sa transmission du fait d'un matériel défectueux ou de signaux parasites. Des erreurs modifient des bits, un 0 se transformant en 1 ou un 1 se transformant en 0. Aussi des techniques permettant de détecter et de corriger ces anomalies ont-elles été mises au point. Ceci fait l'objet de la suite.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs

3. ***Principe du bit de parité***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en le quintuplet (x_1, x_2, x_3, x_4, y), dont le dernier bit y, dit de *parité*, vaut 0 si la somme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est paire, et 1 si elle est impaire. C'est ce quintuplet qui est transmis, il représente le même message M que le code (x_1, x_2, x_3, x_4), à savoir $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4 et le bit de parité, y, est transmis avec les plus grandes précautions.
Par exemple, pour transmettre le nombre $M = 12$ correspondant à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 1$, on calcule d'abord $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, qui est pair ; on pose donc $y = 0$ et on émet le quintuplet $(0,0,1,1,0)$.

a. Quel est le bit y de parité associé au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$ à l'émission ?
b. On reçoit le quintuplet $(1,1,0,1,0)$ dont on suppose le bit de parité (le cinquième, donc) fiable. Justifier que l'information véhiculée par le code a été corrompue.
c. Si on est sûr du bit de parité, peut-on détecter une altération, et peut-on la localiser
- dans le cas où un seul bit d'information est faux à l'arrivée ?
- dans le cas où deux bits d'information sont faux à l'arrivée ?

4. ***Principe des bits de contrôle***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en l'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, où
$y_1 = 0$ si $x_1 + x_2 + x_3$ est pair, $y_1 = 1$ sinon ; $y_2 = 0$ si $x_2 + x_3 + x_4$ est pair, $y_2 = 1$ sinon ; $y_3 = 0$ si $x_1 + x_3 + x_4$ est pair, $y_3 = 1$ sinon. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4.
L'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ code toujours le message $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$.

a. Quels sont les bits y_1, y_2, y_3, dits de *contrôle*, associés au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$?
b. Pourquoi est-on certain que l'heptuplet reçu $(1,1,0,1,0,0,1)$ résulte d'une altération de transmission dans le cas où on est sûr des bits de contrôle ?
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôle, dans l'hypothèse où exactement un des quatre bits d'information est erroné, pourquoi peut-on détecter qu'il y a eu une altération et pourquoi peut-on la localiser (et donc la corriger) ? Peut-on détecter l'erreur quand exactement deux des quatre bits d'information sont erronés ?