Exercice 2.

0.1 Conjecture

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$.

On aimerait déterminer une expression explicite de S_n en fonction de n.

Méthode 1 – Conjecture à l'aide d'un programme et d'un graphique.

(a) Écrire un programme pour hp prime prenant en entrée un entier n et donnant en sortie la valeur de S_n (l'exercice 1 vous a donné les bases de la syntaxe, chercher sur le web les compléments éventuels). Vous écrirez bien sûr le texte du programme sur votre feuille.

(b) A l'aide de ce programme, faire un graphique sur lequel sont représentés les premiers points $(n; S_n)$.

(c) Émettre une conjecture sur une expression de S_n en fonction de n.

Méthode 2 – Dans le CAS (appui sur la touche CAS), chercher à obtenir directement une formule close de S_n à l'aide de la commande sum et de la commande simplify (chercher sur le web si nécessaire). Quelle formule retourne le logiciel ?

0.2 Démonstration

Proposez une démonstration de la conjecture.

0.3 Conjecture méthode 1

Un programme possible pour déterminer les termes de la suite :

```
EXPORT SUITE()
BEGIN
LOCAL N,S,K;
INPUT(N); // entrée N, on calculera S_N
S :=0;
FOR K FROM 1 TO N
    S :=S+K*(N-K);
END;
S :=S/N;
PRINT(S);
END;
```

On peut également entrer N en paramètre et obtenir S_N en image :

```
EXPORT SUITE(N)
BEGIN
LOCAL S,K;
S :=0;
FOR K FROM 1 TO N
    S :=S+K*(N-K);
END;
S :=S/N;
RETURN S;
END;
```

On peut représenter les points $(n;S_n)$ «à la main» ou utiliser l'application «suites».
Dans les deux cas, il semble que l'on obtienne une courbe correspondant à une parabole.
S_n aurait donc une expression de la forme $S_n = an^2 + bn + c$.
Comme $S_1 = 0$, $S_2 = 0{,}5$ et $S_4 = 2{,}5$, on aurait

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0{,}5 \\ 16a+4b+c=2{,}5 \end{cases}$$

On peut alors résoudre ce système d'inconnues a,b,c.
Par exemple dans le CAS (boite à outils/résoudre/système linéaire), on entre :

```
linsolve([a+b+c=0, 4a+2b+c=1/2, 16a+4b+c=5/2],[a,b,c])
```

ce qui donne $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$, $c = \frac{-1}{6}$.
On obtient donc la conjecture $S_n = \frac{1}{6} \times (n^2 - 1)$.

0.4 Conjecture méthode 2

En entrant

```
simplify( 1/n * sum(k*(n-k),k,1,n))
```

on obtient la même formule qu'avec la méthode 1.

0.5 Réécriture de la somme

On a $n\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k \times (n-k)\right)$, ou encore

$n\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \left(nk - k^2\right)$ ce qui s'écrit aussi $n\mathrm{S}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} nk\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$, soit $n\mathrm{S}_n = n\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$

Vous savez (cours de première sur les suites arithmétiques) que l'on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Nous avons donc :

$$n\mathrm{S}_n = n \times \frac{1}{2}n(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

0.6 Conjecture sur $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Avec la calculatrice, nous pouvons conjecturer une formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

En entrant factor$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$ dans le CAS, on obtient la réponse suivante :

$$\text{factor}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

0.7 Démonstration de la formule portant sur la somme des carrés

Pour $n \geqslant 1$ entier naturel, notons $\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Nous cherchons à démontrer par récurrence la phrase : $\mathscr{P}(n)$: «$\mathrm{T}_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ».

Amorce. $\mathrm{T}_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1}{6}1(1+1)(2\times 1+1) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ serait vraie (hypothèse de récurrence).

Nous avons : $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n + (n+1)^2$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons donc $\mathrm{T}_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$,

ce qui s'écrit aussi : $\mathrm{T}_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1) \times \left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)$, soit $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1) \times \left(2n^2 + 7n + 6\right)$.

Par ailleurs, par un développement, on voit aisément que $((n+1)+1) \times (2(n+1)+1) = 2n^2 + 7n + 6$.

Nous avons donc établi, sous l'hypothèse $\mathscr{P}(n)$, que l'on a $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1) \times ((n+1)+1) \times (2(n+1)+1)$, c'est à dire $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

0.8 Retour à l'expression S_n.

Nous avons vu dans un point précédent :

$$nS_n = n \times \frac{1}{2} n(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

Avec la formule sur la somme des carrés des premiers entiers, cela donne :

$$nS_n = n \times \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

En simplifiant par le facteur n :

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

En factorisant par $n+1$:

$$S_n = (n+1) \times \left(\frac{1}{2} n - \frac{1}{6}(2n+1)\right)$$

En réduisant la parenthèse :

$$S_n = (n+1) \times \left(\frac{1}{6} n - \frac{1}{6}\right)$$

Soit

$$S_n = \frac{1}{6}(n+1) \times (n-1)$$

Ou encore :

$$S_n = \frac{1}{6}(n^2 - 1)$$

Nous avons donc prouvé la formule annoncée par la calculatrice.