OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2019

SUJETS ACADEMIQUES

Les candidats traitent **deux exercices**.

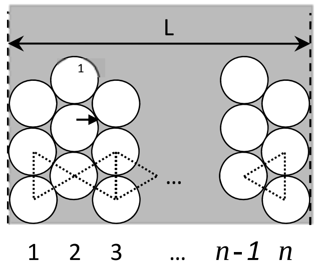
Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (rangement optimal de boites dans les casiers) et 2 (se suivre sans perdre un chiffre).

Les autres traitent les exercices numéros 1 (rangement optimal de boites dans les casiers) et 3 (triangles en somme).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

RANGEMENT OPTIMAL DE BOITES DANS DES CASIERS

Partie 1 **:** *Recherche d'une disposition efficace*



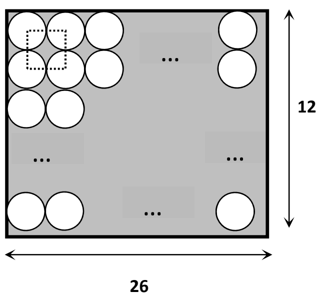
1) a) Soit h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2, montrer que $h = \sqrt{3}$.

b) On considère n colonnes de disques tangents de rayon 1 dans la disposition ci-contre. Montrer que la longueur L occupée par ces n colonnes est égale à $2 + (n-1)\sqrt{3}$

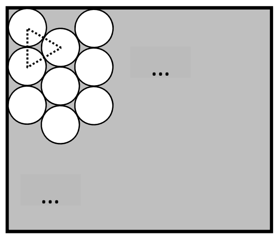
2) Application :
Un commerçant souhaite ranger des boîtes cylindriques de rayon 1 dans un casier rectangulaire de longueur 26 et de largeur 12. En partant du coin supérieur gauche il dispose côte à côte, en lignes ou en colonnes, le plus grand nombre possible de boîtes.
Dans la suite du problème, les boîtes sont représentées par des disques de rayon 1.

Le commerçant hésite entre les trois dispositions suivantes (échelle non respectée) :

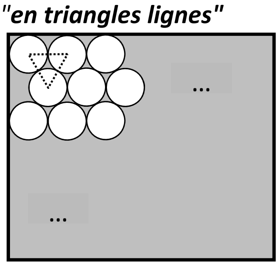
Disposition 1:
"en carrés"



Disposition 2:
"en triangles colonnes"



Disposition 3:
"en triangles lignes"



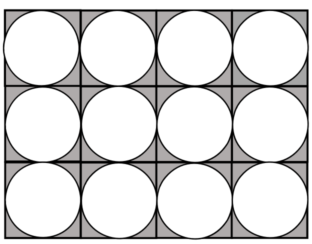
Attention :
Les disques situés en bout de lignes ou de colonnes ne touchent donc pas nécessairement les bords du casier.

Déterminer la disposition permettant de ranger le plus grand nombre de boîtes.

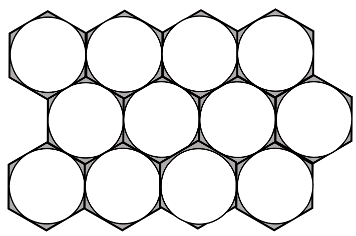
Partie 2 **:** *Estimation de la proportion de l'aire occupée par les disques :*

On a circonscrit les disques par des polygones (afin de paver l' « intérieur » du casier)

Par des carrés pour la disposition 1 :



Par des hexagones réguliers pour les dispositions 2 et 3 :



On admettra que, pour des casiers de « grandes dimensions », la proportion de l'aire totale occupée par les disques dans les casiers « se rapproche » de : $P = \frac{Aire\ d'un\ disque}{Aire\ d'un\ polygone}$.

1) Déterminer la valeur exacte de P pour la disposition 1 puis pour les dispositions 2 et 3

2) Donner une estimation du nombre n de boîtes que l'on peut ranger dans de « grands » casiers en fonction de l'aire S du casier (on envisagera les cas de la disposition 1 puis des dispositions 2 et 3).

***<u>Partie 3</u>* :** *Une disposition plus efficace :*

On considère un casier rectangulaire de longueur 444 et de largeur 4.
Trouver une nouvelle disposition permettant de ranger 445 boîtes (on représentera cette nouvelle disposition par un schéma puis on déterminera le nombre de boites par le calcul).

Se suivre sans perdre un chiffre

Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Pour tout entier naturel $a \geq 0$, on dit que la suite $(a, a+1, a+2, \dots, a+n-1)$ de n nombres entiers consécutifs est k-complète de longueur n si ces n nombres ont chacun k chiffres et que chaque chiffre de 0 à 9 apparaît au moins une fois dans l'écriture décimale de l'un d'eux.

Par exemple, la suite (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19) est 2-complète de longueur 10, tandis que (34, 35, 36, 37, 38) n'est pas 2-complète car les chiffres 0, 1, 2 et 9 n'apparaissent dans aucun entier de cette suite.

On dit qu'une suite k-complète est **minimale** s'il n'existe pas de suite k-complète de longueur strictement inférieure. Par exemple, la première suite 2-complète donnée en exemple n'est pas minimale car (90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98) est elle aussi 2-complète, de longueur 9. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ces suites k-complètes minimales, et de les dénombrer.

Dans ce problème, l'écriture décimale d'un entier non nul ne commencera jamais par le chiffre 0.

§1. Longueur minimale d'une suite k-complète

Question 1. Dans cette question, $k = 1$: on considère des nombres entiers à un chiffre.

a) Écrire toutes les suites 1-complètes possibles. Aucune justification n'est attendue.

b) En déduire le nombre de suites 1-complètes minimales ainsi que leur longueur.

Question 2. Soit $k \geq 10$. Proposer une suite k-complète minimale, et indiquer sa longueur.

Question 3. Donner la longueur minimale d'une suite 9-complète. Justifier.

Question 4. Dans cette question, $k = 3$.

a) Donner un exemple de suite 3-complète de longueur 7.

b) Expliquer pourquoi aucune suite de 6 entiers consécutifs comportant trois chiffres ne peut être 3-complète, en justifiant soigneusement.

Question 5. On considère dans cette question que le nombre k de chiffres vérifie $2 \leq k \leq 8$. Démontrer que les suites k-complètes minimales sont de longueur $10 - k$.

§2. Dénombrement des suites k-complètes minimales

Question 1. Combien de nombres entiers à dix chiffres peut-on écrire en utilisant une et une seule fois chaque chiffre de 0 à 9 ? Justifier (on pourra commencer par déterminer le nombre de possibilités pour le chiffre le plus à gauche). En déduire le nombre de suites 10-complètes minimales.

Question 2. Soit $k = 4$. On considère une suite 4-complète minimale quelconque, commençant par l'entier a. Cette suite est donc de longueur 6.

a) Montrer que le chiffre des dizaines ne peut pas être le même pour tous les nombres d'une suite 4-complète minimale. En déduire les chiffres des unités possibles pour l'entier a.

b) Déterminer le nombre de possibilités pour le chiffre des dizaines de l'entier a, en fonction de son chiffre des unités.

c) Déterminer le nombre de possibilités pour les chiffres des centaines et des milliers de l'entier a, en sachant que la suite de 6 entiers consécutifs commençant par a est 4-complète minimale.

d) Démontrer qu'une telle construction donne bien toujours le premier nombre entier d'une suite 4-complète minimale.

e) Déterminer le nombre de suites 4-complètes minimales.

Question 3. Soit $2 \leq k \leq 8$. Démontrer que le nombre de suites k-complètes minimales est : $(9-k) \times 2 \times 3 \times \cdots \times (k-1)$.

Question 4. Montrer que le nombre de suites 9-complètes minimales est 579 600.

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats AUTRES que la série S)

Triangles en somme

On construit des triangles de la façon suivante :

- n étant un entier naturel non nul, on écrit sur la première ligne les entiers naturels consécutifs de 1 à n.
- À partir de la deuxième ligne, on place les entiers obtenus en faisant la somme des deux entiers situés au-dessus.
- On s'intéresse au nombre isolé qui sera situé à la dernière ligne du triangle. On désigne par S_n ce dernier nombre.

L'objectif du problème est de calculer S_{2019}.

1) Étude sur quelques exemples.

Voici les premiers triangles obtenus pour $n = 2, n = 3, n = 4$.

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1 2 3	1 2 3 3 5 8	1 2 3 4 3 5 7 8 12 20

a) Donner pour chacun d'eux le nombre S_n correspondant.

b) Construire les triangles obtenus pour $n = 5$ puis $n = 6$. Donner leur nombre de lignes ainsi que les valeurs de S_5 et S_6.

2) Construction des lignes

La première ligne d'un triangle est construite de la façon suivante :

$$1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; \ldots. \;\; p-1 \;\; p \;\; p+1 \;\; \ldots\ldots \; n-1 \;\; n$$

où $p-1$, p , $p+1$ désignent trois entiers naturels consécutifs.

a) Justifier que dans la deuxième ligne du triangle, la différence entre deux entiers placés côte à côte est égale à 2.

b) Justifier que dans la troisième ligne du triangle, la différence entre deux entiers consécutifs placés côte à côte est égale à 4.

c) Expliquer que, dans ligne numéro p du triangle, la différence entre deux entiers placés côte à côte est égale à 2^{p-1}.

d) On remarquera que chaque ligne possède un nombre en moins que la ligne placée au-dessus, et que chaque ligne numéro p commence par S_p. (On ne demande pas de démontrer ce résultat).

On suppose que la ligne numéro 1 possède n nombres entiers. Combien de nombres contient la ligne numéro p. Justifier.

e) En déduire que sur ligne numéro p du triangle, on trouve de gauche à droite les nombres :

$$S_p\ ,\qquad S_p + 2^{p-1},\qquad S_p + 2 \times 2^{p-1},\quad \ldots\quad , S_p + (n-p) \times 2^{p-1}$$

3) Algorithme permettant d'obtenir S_n.

a) Déterminer une relation exprimant S_n en fonction de S_{n-1}.

b) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche en sortie le nombre S_n

```
Saisir une valeur pour N
S ← ……..
Pour k allant ……….
    S ←……….
Fin Pour
Afficher S
```

c) Utiliser votre calculatrice pour calculer S_{20}.

4) Calcul de S_{2019}.

a) À l'aide de la relation obtenue à la question 3 a), démontrer que pour tout $n \geq 2$, S_n est divisible par 2^{n-2}.

b) Déterminer une relation exprimant S_n en fonction de n.

Vérifier votre formule avec S_6 et S_{20}.

c) En déduire la valeur exacte de S_{2019}.