Des milieux

Dans les programmes

Coordonnées d'un point, d'un milieu – Logique : et / ou – Probabilités (tirage au hasard dans un ensemble fini) – Fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 Un milieu à coordonnées entières

1.1 Quotient

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Une droite d est munie d'un repère :

   Pour un réel x, on appelle partie entière de x (notée $\lfloor x \rfloor$), l'entier le plus proche sur la gauche de x sur cette droite.
   Donnez les valeurs de $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor -5{,}12 \rfloor$, $\lfloor 6 \rfloor$.

2. Soient A et B deux noeuds. En utilisant la fonction partie entière, complèter l'algorithme suivant puis le traduire sur machine :

   Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
   Sortie : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

1.2 Reste

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.
Soient A et B deux nœuds.
On note R_2 la fonction qui à tout entier n associe le reste de la division euclidienne de n par 2.

1. Quelles sont les images de $x_A + x_B$ et de $y_A + y_B$ par la fonction R_2 lorsque le milieu J du segment $[AB]$ est un nœud ?
2. On suppose que le point J n'est pas un nœud. Laquelle ou lesquelles des phrases ci-dessous correspond exactement à cette situation ?
   (a) $R_2(x_A + x_B) = 1$ et $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (b) $R_2(x_A + x_B) = 1$ ou $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (c) $\left(R_2(x_A + x_B) = 1 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 0\right)$ *ou* $\left(R_2(x_A + x_B) = 0 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 1\right)$

(d) $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=0\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=0$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$

3. Compléter l'algorithme suivant à l'aide de la fonction R_2 :

Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
Sortie : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

4. Écrire un programme sur votre machine traduisant cet algorithme.

2 Tirage au hasard de deux nœuds

Dans cette partie, le mot « nœud » désignera uniquement les points à coordonnées entières dont l'abscisse x vérifie $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et l'ordonnée y vérifie $-5 \leqslant y \leqslant 5$.
Traduire l'algorithme suivant sur machine :

```
Entrée : Un entier n > 0
début
    compteur ⟵ 0
    répéter n fois
        Tirer un noeud A puis un noeud B au hasard (non nécessairement distinct de A).
        si le milieu de [AB] est un noeud alors
            compteur ⟵ compteur +1
fin
Sortie : compteur/n
```

Donner une estimation de la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds.

3 Dénombrement

1. Écrire un algorithme qui dénombre le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds puis un algorithme dénombrant le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds et pour milieu un noeud.
2. Faire ce même décompte « à la main ».
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds ?

4 Tirage de cinq noeuds au hasard

A l'aide d'un algorithme, on a simulé des tirages de cinq noeuds au hasard puis estimé la probabilité que l'un au moins des dix segments définis par ces noeuds ait un noeud pour milieu. Par observation des résultats, on conjecture une probabilité de 1.
Comment expliquer cette observation ?

Éléments de réponses – Calculatrices TI

1 Un milieu à coordonnées entières

1.1 Quotient

Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
début
  si $\lfloor \frac{x_A+x_B}{2} \rfloor == \frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $\lfloor \frac{y_A+y_B}{2} \rfloor == \frac{y_A+y_B}{2}$ **alors**
    retourner True
  sinon
    retourner False
fin

```
Program :milquo
Prompt A,B
Prompt X,Y
If int((A+X)/2)=(A+X)/2 and int((B+Y)/2)=(B+Y)/2
Then
Disp "oui"
Else
Disp "non"
End
```

1.2 Reste

Les petits modèles ti ne présentent pas de fonction reste. Ce peut être l'occasion de mettre en évidence le fait que la condition avec le reste est équivalente à celle utilisée avec le quotient en rappelant le lien reste $= a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.
On peut aussi remplacer cela par un petit travail sur le pgcd (mais la fonction pgcd de ces calculatrices ne fonctionne que sur les entiers positifs) :

```
Program :milquo
Prompt A,B
Prompt X,Y
If gcd(A+X,2)=2 and gcd(B+Y,2)=2
Then
Disp "oui"
Else
Disp "non"
End
```

2 Tirage au hasard de deux noeuds

Program : tir
Prompt N $0 \longrightarrow C$ For(K,1,N) int(9∗rand−4)$\longrightarrow A$ int(11∗rand−5)$\longrightarrow B$ int(9∗rand−4)$\longrightarrow X$ int(11∗rand−5)$\longrightarrow Y$ If int((A+X)/2)=(A+X)/2 and int((B+Y)/2)=(B+Y)/2 Then $C+1 \longrightarrow C$ End End Disp C/N

3 Dénombrement

Le nombre total de segments (en comptant ceux réduits à un point) : $99 \times 99 = 9\,801$.

Program : denom

$0 \longrightarrow C$
For(A,−4,4)
For(B,−5,5)
For(X,−4,4)
If int((X+A)/2)=(X+A)/2
Then
For(Y,−5,5)
If int((B+Y)/2)=(B+Y)/2
Then
$C+1 \longrightarrow C$
End
End
End
End
End
End
Disp C

réponse : 2 501.
Dénombrement "à la main" :
- on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, pair) : 25×25,
- on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, impair) : 30×30,
- on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, pair) : 20×20,
- on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, impair) : 24×24.

Le total est de 2 501.

La probabilité demandée est donc de $\frac{2\,501}{9\,801} \approx 0{,}255$.

4 Cinq noeuds au hasard

Les coordonnées d'un point entier sont de l'un des quatre types suivants : (pair, pair), (pair, impair), (impair, pair), (impair,impair). Sur cinq noeuds, deux ont le même type et leur milieu est nécessairement un noeud. D'où une probabilité de 1.