Les mendiants généreux

Un voyageur sans un sou en poche se promène dans une ville imaginaire et rencontre des mendiants.

Le premier mendiant lui demande 1€, le voyageur, navré, lui répond qu'il n'a aucun euro en poche.

Le mendiant lui dit alors : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 1€ ».

Le voyageur repart un peu confus et étonné d'avoir maintenant 1€ en poche. Il rencontre un 2ème mendiant qui lui demande 2€. Le voyageur, navré, lui dit qu'il n'a qu'un euro en poche, ce à quoi le mendiant répond : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 2€ ».

Le voyageur poursuit son chemin avec 3€ en poche et rencontre un 3ème mendiant qui lui demande 3€. Ravi de les avoir, le voyageur lui donne les 3€ qu'il a en poche et continue son chemin sans argent.

Un peu plus loin, il rencontre un 4ème mendiant qui lui demande 4€…

L'histoire se poursuit ainsi : Lorsque le voyageur rencontre le n-ième mendiant, celui-ci lui demande n euros. Si le voyageur les possède, il les lui donne, sinon, c'est le mendiant qui les lui donne.

Pour tout entier n, avec $n \geq 0$, on appelle u_n la somme d'argent en euro, que possède le voyageur après avoir rencontré le n-ième mendiant. On a donc : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 0$.

On définit ainsi une suite (u_n).

1°) Donner les termes de la suite (u_n) pour n allant de 4 à 10.

2°) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir les sommes d'argent, en euro, que possède le voyageur jusqu'au 50ème mendiant rencontré.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

4°) a) Démontrer que si $1 \leq u_n \leq n$ alors $u_{n+2} = u_n - 1$

b) Démontrer que si $n + 1 \leq u_n \leq 2n$ alors $u_{n+2} = u_n + 1$

5°) a) Démontrer que si $u_n = 0$ alors $u_{3n+3} = 0$

b) En utilisant le fait que $u_0 = 0$, trouver six autres termes de la suite (u_n) valant 0.

6°) On admet que pour tout $p \geq 1$, $S_p = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^p = \frac{3^{p+1} - 3}{2}$

Démontrer que si $n = \frac{3^{p+1} - 3}{2}$ avec p entier positif quelconque, alors $u_n = 0$

7°) a) Ecrire 1092 sous la forme d'une somme de puissances successives de 3.

b) En déduire la somme d'argent, en euro, possédée par le voyageur après avoir rencontré le 2020ème mendiant.

8°) En remarquant que $S_7 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3279$, déterminer un entier n tel que $u_n = 2020$.

9°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{3n+1} = 3u_n + 1$.

Eléments de correction

1°)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1

2°)

```
U prend la valeur 0
n prend la valeur 0
Pour n allant de 0 à 50
        Afficher n, U
        Si U<n+1 alors U prend la valeur U+n+1
           Sinon  U prend la valeur U- (n+1)
           Fin si
Fin Pour
```

3°) Par récurrence mais les élèves de première ne connaissent pas ce type de raisonnement

Pour n=0 c'est vrai.

Pour un n donné on suppose $0 \leq u_n \leq 2n$ on veut démontrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 2n+2$

Supposons $0 \leq u_n \leq n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1} il reçoit, en euros, $n+1$ donc il possède après u_{n+1} tel que $0 \leq \; n+1 \leq u_{n+1} \leq 2n+1 \leq 2n+2$.

Supposons $n+1 \leq u_n \leq 2n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1}, c'est le voyageur qui donne, en euros, $n+1$ donc il lui reste après u_{n+1} tel que $0 \leq u_{n+1} \leq n-1 \leq 2n$+2.

Par récurrence on a donc : Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

Sinon on peut raisonner comme suit.

Le cas le plus défavorable pour le voyageur est qu'il possède n euros lorsqu'il rencontre le n-ième mendiant. Dans ce cas, il donne tout son argent et il possède ensuite 0€.

On a donc pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$

Le cas le plus favorable pour le voyageur est qu'il possède $(n-1)$ € lorsqu'il rencontre le n-ième mendiant. Dans ce cas, il possède ensuite $(2n-1)$ €.

On a donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n \leq 2n-1$

Comme $u_0 = 0$, on a bien pour tout entier naturel $n \geq 0$: $u_n \leq 2n$

4°)a)

Supposons $1 \leq \; u_n \leq n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+1)$ il n'a pas assez d'argent, il reçoit $(n+1)$€ donc on a $u_{n+1} = u_n + n + 1$ avec

$$n+2 \leq \; u_n + n + 1 \leq 2n+1$$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+2)$, il aura suffisamment d'argent, donc il lui donnera $(n+2)$€. Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} - (n+2) = u_n + n + 1 - n - 2 = u_n - 1$

4°)b)

Supposons $n+1 \leq u_n \leq 2n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+1)$ il a assez d'argent, il donne $(n+1)$€ donc on a $u_{n+1} = u_n - (n+1)$ avec $0 \leq u_n - n - 1 \leq n - 1$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+2)$, il n'aura pas suffisamment d'argent, donc il recevra $(n+2)$€.

Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+2) = u_n - n - 1 + n + 2 = u_n + 1$

5°)a)

Si $u_n = 0$ alors $u_{n+1} = n+1$ et on se trouve dans le cas du 4°a) donc $u_{n+3} = (n+1) - 1$ et on restera dans la cas du 4°a) jusqu'à ce qu'on retombe à 0.

Ainsi $u_{n+(2k+1)} = (n+1) - k$ pour tout $0 \leq k \leq n+1$.

Donc lorsque $k = n+1$, on aura $u_{n+2(n+1)+1} = 0$ c'est-à-dire $u_{3n+3} = 0$

5°)b) On a $u_0 = 0$ donc $u_3 = 0$, puis $u_{3\times 3+3} = u_{12} = 0$, puis $u_{3\times 12+3} = u_{39} = 0$, puis $u_{3\times 39+3} = u_{120} = 0$, puis $u_{3\times 120+3} = u_{363} = 0$, puis $u_{3\times 363+3} = u_{1092} = 0$

6°)

Les indices de termes qui valent 0 sont 0, 3, 3^2+3, 3^3+3^2+3, $3^4+3^3+3^2+3$ etc… sommes qui s'expriment, en fonction de $p \geq 1$, comme précédemment et qui, pour $p = 0$ donne bien pour indice 0 avec la même formule. Donc si le rang est $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque les termes u_n de la suite valent 0.

7°)a)

$$1092 = S_6 = 3 + 3^2 + \cdots + 3^6$$

7°)b)

On a $u_{1092} = 0$ donc $U_{1093} = 1093$.

On obtient alors $u_{2019} = 1093 - \frac{2019-1093}{2} = 1093 - 463 = 630$.

Ainsi $u_{2020} = 2020 + 630 = 2650$. Après avoir rencontré le 2020ème mendiant le voyageur possède 2650€

8°)

Si l'on part de $U_{1093} = 1093$ on a pour tout entier k ; $0 \leq k \leq 1093$, $u_{1093+2k} = 1093 - k$.

Or $1093 - k = 2020$ est impossible avec k positif.

On a de plus $u_{1094} = 2187$ avec $u_{1094+2k} \geq 2187 > 2020$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 1093$.

On doit donc aller jusqu'au prochain terme nul de la suite.

On a $S_7 = 3279$ donc $u_{3279} = 0$, ainsi $u_{3280} = 3280$

Puis $u_{3280+2k} = 3280 - k$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 3280$.

On cherche k tel que $3280 - k = 2020 \Leftrightarrow k = 1260$.

On obtient $u_{3280+2\times1260} = u_{5800} = 2020$

Remarque : Le prochain entier qui vérifie la même propriété est 25483 : $u_{25483} = 2020$.