Un crible

Dans les programmes

Équation de droite, fonction carré, notion de courbe représentative, intersection de deux droites, diviseur d'un entier, nombres premiers.

Soit f la fonction carré et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Écrire un programme avec ALGOBOX qui représente les segments dont une extrémité est le point d'abscisse -2 de $\mathscr{P}$ et l'autre extrémité le point d'abscisse i de $\mathscr{P}$, où i parcourt l'ensemble des entiers entre 1 et 10.
2. Quellle conjecture peut-on émettre quant à l'intersection d'un segment d'extrémités $A(-2;4)$ et $B_i\left(i;i^2\right)$ avec l'axe des ordonnées ? Démontrer cette conjecture.
3. Modifier le programme précédent en changeant le point A d'abscisse -2 de la courbe en le point A d'abscisse -3 (les autres extrémités resteront inchangées).
   Quelle conjecture faîtes vous dans ce cas ? Démontrer.
4. Modifier le programme afin qu'il demande en premier lieu un entier naturel non nul k puis trace les segments $[AB_i]$ où $A\left(-k;k^2\right)$. La conjecture se généralise-t-elle ? Démontrer.
5. On trace les segments $[A_jB_i]$ (où i et j sont des entiers naturels et A_j d'abscisse $-j$ et B_i d'abscisse i sont des points de la parabole représentant la fonction carré) pour j prenant les valeurs entières entre 2 et 10 et i prenant les valeurs entières entre 2 et 50. Quelle particularité ont les ordonnées entières des points de l'axe des ordonnées qui n'appartiennent à aucun des segments ainsi tracés ?

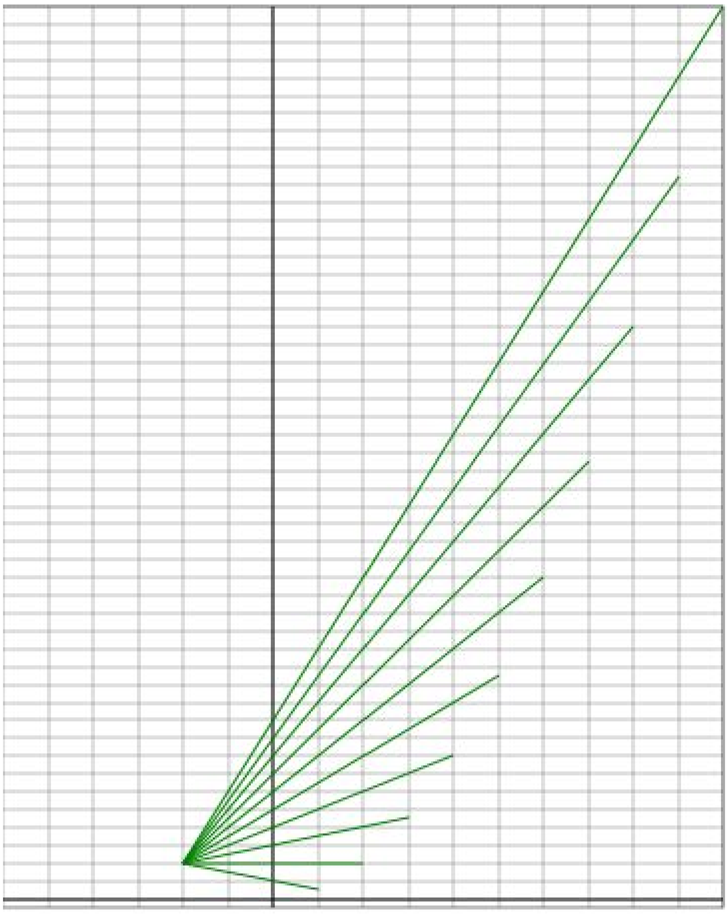
Éléments de réponses – ALGOBOX

1. **Les multiples de 2**

   L'algorithme sous algobox :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT (-2,4)->(i,i*i)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Une image :



Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i).
Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i} - y_A}{x_{B_i} - x_A} = \frac{i^2-4}{i+2} = i - 2$.
Et l'ordonnée à l'origine :
$p = y_A - m \times x_A = 4 - (i-2) \times (-2) = 2i$.
Les ordonnées à l'origine sont les multiples de 2.

2. **Les multiples de 3.**
   L'algorithme sous algobox :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT (-3,9)->(i,i*i)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

   Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i).
   Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i} - y_A}{x_{B_i} - x_A} = \frac{i^2-9}{i+3} = i-3$.
   Et l'ordonnée à l'origine :
   $p = y_A - m \times x_A = 9 - (i-3) \times (-3) = 3i$.
   Les ordonnées à l'origine sont les multiples de 3.

3. Algorithme :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrez un entier naturel k (non nul)"
  LIRE k
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT (-k,k*k)->(i,i*i)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

   Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i) où $A\left(-k;k^2\right)$, k étant un entier naturel $\neq 0$.
   Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i} - y_A}{x_{B_i} - x_A} = \frac{i^2-k^2}{i+k} = i-k$.
   Et l'ordonnée à l'origine :
   $p = y_A - m \times x_A = k^2 + k(i-k) = ki$.
   Les ordonnées à l'origine sont les multiples de k.

4. **Le crible de Matiassevitch**
   L'algorithme sous algobox :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR j ALLANT_DE 2 A 10
    DEBUT_POUR
    POUR i ALLANT_DE 2 A 50
      DEBUT_POUR
      TRACER_SEGMENT (-j,j*j)->(i,i*i)
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

La figure n'est pas très lisible ...