NOM, Prénom : Classe :

CAHIER DE MATHEMATIQUES

Liaison collège – lycée

Ce cahier est le fruit de la collaboration de professeurs de mathématiques des collèges Bel Air, Bois Franc, Emile Zola, Eugène Dubois, Jean-Claude Ruet, Mont Saint Rigaud, Val d'Ardières et Val de Saône ainsi que de professeurs du lycée Aiguerande.
Son but est de consolider les techniques de base du calcul et leurs automatismes.

		INSUFFISANT Aucune de mes réponses n'est correcte	**FRAGILE** J'ai quelques réponses correctes	**SATISFAISANT** Je réponds correctement à presque toutes les questions	**TRES SATISFAISANT** Toutes mes réponses sont correctes
ARITHMETIQUE	Critères de divisibilité				
	Multiples, diviseurs, simplification de fractions				
	Nombres premiers				
FRACTIONS	Addition et soustraction				
	Multiplication				
	Division				
	Toutes les opérations				
PUISSANCES	Cas général				
	Puissances de 10				
CALCUL LITTERAL	Réduire une expression				
	Développer une expression				
	Factoriser une expression				
	Supprimer des parenthèses				
EQUATIONS	Test d'égalité				
	Équations du 1er degré				
	Équations du 2nd degré				

Besoin de te rafraîchir la mémoire?

ARITHMETIQUE

VOCABULAIRE

a et b sont deux entiers naturels (avec b non nul).

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que :

$a = b \times q + r \qquad \text{avec } r < b$

Lorsque le reste r est nul, on dit que :

b est un diviseur de a

a est divisible par b

a est un multiple de b

Exemple : 18 = 6 x 3 + 0 donc : 3 et 6 sont des diviseurs de 18
18 est divisible par 3 et 6
18 est un multiple de 3 et 6

CRITERES DE DIVISIBILITE

Divisibilité par	Critère de divisibilité	Exemples
2	Le chiffre des unités est pair	12 3156
3	La somme des chiffres est un multiple de 3	231 (2 + 3 + 1 = 6) 8430 (8 + 4 + 3 + 0 = 15)
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5	610 17165
9	La somme des chiffres est un multiple de 9	342 (3 + 4 + 2 = 9) 19548 (1 + 9 + 5 + 4 + 8 = 27)
10	Le chiffre des unités est 0	570 64370

NOMBRES PREMIERS

Un nombre premier est un nombre entier qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même

Exemples :
- Les seuls diviseurs de 17 sont 1 et 17 donc 17 est un nombre premier.
- 4 possède trois diviseurs (1 ; 2 et 4) donc 4 n'est pas premier.
- Les seuls diviseurs de 2 sont 1 et 2 donc 2 est premier : c'est le seul nombre premier pair !
- 1 possède un unique diviseur : lui-même. Donc 1 n'est pas premier.

1 Critères de divisibilité

Compléter le tableau.

divisible ...	par 2	par 3	par 5	par 9	par 10
456					
185					
1 530					
2 451					
...	non	oui	oui	non	non
...	oui	oui	non	oui	non

2 Multiples, diviseurs, simplification de fractions

① Vrai ou Faux ?

(a) 16 est un diviseur de 32 ? ....

(b) 8 est un multiple de 2 ? ....

(c) 17 n'a aucun diviseur ? ....

② Simplifier au maximum.

$A = \dfrac{42}{70}$ $\quad B = \dfrac{72}{450}$ $\quad C = \dfrac{32}{15} \times \dfrac{25}{24}$

....

....

....

....

3 Nombres premiers

① Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

7 158 ....

5 151 ....

② (a) Donner deux nombres premiers dont la somme est un nombre premier.

....

(b) Donner deux nombres non premiers dont la somme est un nombre premier.

....

(c) Donner deux nombres premiers dont la somme n'est pas un nombre premier.

....

Besoin de te rafraîchir la mémoire?

FRACTIONS

ADDITION ET SOUSTRACTION

Pour additionner ou soustraire des fractions celles-ci doivent avoir le même dénominateur.

Exemples :

$$A = \frac{4}{3} + \frac{8}{5}$$
$$A = \frac{4\times5}{3\times5} + \frac{8\times3}{5\times3}$$
$$A = \frac{20}{15} + \frac{24}{15}$$
$$A = \frac{44}{15}$$

$$B = 5 - \frac{7}{6}$$
$$B = \frac{5\times6}{1\times6} - \frac{7}{6}$$
$$B = \frac{30}{6} - \frac{7}{6}$$
$$B = \frac{23}{6}$$

MULTIPLICATION

Pour multiplier les fractions, on multiplie les numérateurs ensemble et on multiplie les dénominateurs ensemble.

Exemples :

$$C = \frac{-3}{5} \times \frac{7}{8}$$
$$C = \frac{-3 \times 7}{5 \times 8}$$
$$C = -\frac{21}{40}$$

DIVISION

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemples :

$$D = \frac{-2}{5} \div \frac{7}{6}$$
$$D = \frac{-2}{5} \times \frac{6}{7}$$
$$D = \frac{-2 \times 6}{5 \times 7}$$
$$D = -\frac{12}{35}$$

PENSER A DONNER LES RESULTATS SOUS LA FORME DE FRACTIONS IRREDUCTIBLES

Exemple : $\frac{330}{429} = \frac{2\times3\times5\times11}{3\times11\times13} = \frac{2\times5}{13} = \frac{10}{13}$

Dans chaque exercice, calculer et donner le résultat sous forme d'une **fraction irréductible**.

1 Addition et soustraction

$A = \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{5}$

$B = -5 + \dfrac{9}{8}$

$C = \dfrac{8}{7} - \dfrac{-3}{14} - \dfrac{5}{21}$

2 Multiplication

$D = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{7}$

$E = \dfrac{-7}{3} \times \dfrac{6}{11}$

$F = \dfrac{-25}{12} \times \dfrac{9}{-10}$

3 Division

$G = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{4}{3}$

$H = \dfrac{-4}{7} \div \dfrac{8}{7}$

$I = -\dfrac{10}{3} \div \dfrac{-3}{7}$

4 Toutes les opérations

$J = \dfrac{4}{7} + \dfrac{-5}{7} \div \dfrac{3}{8}$

$K = \dfrac{7}{4} - \left(\dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{2}\right)$

Besoin de te rafraîchir la mémoire?

LES PUISSANCES

PUISSANCE D'UN NOMBRE

a est un nombre relatif.

n est un entier supérieur ou égal à 1.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a}_{\text{n facteurs}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{avec } a \neq 0$$

Cas particuliers : $a^1 = a \qquad a^0 = 1$

Exemples : $\boxed{5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125}$ $\qquad \boxed{4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}}$

PUISSANCE DE 10

n est un entier supérieur ou égal à 1.

10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10 \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\,\underbrace{000 \ldots 000}_{\text{n zéros}}$$

10^{-n} désigne l'inverse de 10^n.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10 \times 10}_{\text{n facteurs}}} = \underbrace{0{,}000 \ldots\ldots 000}_{\text{n zéros}}\,1$$

Exemples : $\boxed{10^5 = 10\ 000}$ $\qquad \boxed{10^{-3} = 0{,}001}$ $\qquad \boxed{4 \times 10^2 = 4 \times 100 = 400}$

ECRITURE SCIENTIFIQUE D'UN NOMBRE

La notation scientifique d'un nombre est la seul écriture de la forme a x 10^n dans laquelle :

- a est plus grand que 1 et strictement plus petit que 10
- n est un nombre entier

Exemples : $\boxed{5260 = 5{,}26 \times 10^3}$ $\qquad \boxed{0{,}028 = 2{,}8 \times 10^{-2}}$ $\qquad \boxed{75 \times 10^{-5} = 7{,}5 \times 10^{-4}}$

1 Cas général

Sans calculatrice, calculer et donner le résultats sous la forme d'un entier ou d'une fraction.

$A = 3^2 + 5^2 \times 2^3$ $B = 2^{-3}$ $C = (-3)^4$ $D = -3^4$

....

....

....

2 Puissances de 10

① Écrire chacun des nombres suivants sous la forme 10^n.

$100 =$ .... $0,001 =$ .... 1 000 000 = ... 0,000 01 = ...

② Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

5 680 = ... $0,00024 =$ ....

5 863,5$\times 10^{-8} =$ .... $0,0289 \times 10^{15} =$ ....

③ Calculer et donner le résultat sous forme d'une puissance de 10.

(a)

$10^4 \times 10^2 =$ .... $10^{-4} \times 10^2 =$ .... $10^4 \times 10^{-2} =$ ....

....

(b)

$\frac{10^7}{10^3} =$ .... $\frac{10^4}{10^9} =$ .... $\frac{10^5}{10^{-6}} =$ ....

....

(c)

$\frac{10^7 \times 10^2}{10^5} =$ .... $\frac{10^3 \times 10^4}{10^9} =$ .... $10^{-5} \times \frac{10^2}{10^{-2}} =$ ....

....

④ Calculer et donner le résultat en écriture scientifique.

$\frac{80 \times 10^6}{2 \times 10^4}$ = ...

= ....

= ....

Besoin de te rafraîchir la mémoire?

CALCUL LITTERAL

REDUIRE UNE EXPRESSION

Réduire une somme

Pour réduire une somme, on regroupe les termes par « famille ».

Exemples : $2x - 6x + 8 = -4x + 8$

$7x^2 - 3x + 4x^2 - 6 + x = 11x^2 - 2x - 6$

> Pour réduire $3x + 5x$, on factorise par x !
>
> $3x + 5x$
> $= (3 + 5)x$
> $= 8x$

Réduire un produit

Dans un produit, on écrit les facteurs dans l'ordre que l'on veut.

Exemples : $4 \times a \times 5 = 4 \times 5 \times a = 20 \times a = 20a$

$3 \times c \times (-2) \times c = 3 \times (-2) \times c \times c = -6 \times c^2 = -6c^2$

DISTRIBUTIVITE

a, b, c et d sont quatre nombres. Alors :

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ **(distributivité simple)**

$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ **(double distributivité)**

Exemples : **La distributivité pour développer**

$x(7x - 3)$
$= x \times 7x + x \times (-3)$
$= 7x^2 - 3x$

$(2x - 5)(4 - 6x)$
$= 2x \times 4 + (2x) \times (-6x) + (-5) \times 4 + (-5) \times (-6x)$
$= 8x - 12x^2 - 20 + 30x$
$= -12x^2 + 38x - 20$

Exemple : **La distributivité pour factoriser**

$10x - 15x^2 = 2 \times 5x - 3x \times 5x = 5x(2 - 3x)$

CALCULER AVEC DES PARENTHESES

Exemples :

$7 + (2x - 3)$
$= 7 \mathbf{+ 1 \times} (2x - 3)$
$= 7 + 1 \times 2x + 1 \times (-3)$
$= 7 + 2x - 3$
$= 2x + 4$

$12x - (5 - 3x)$
$= 12x \mathbf{- 1 \times} (5 - 3x)$
$= 12x - 1 \times 5 - 1 \times (-3x)$
$= 12x - 5 + 3x$
$= 15x - 5$

1 Réduction d'une expression

Réduire chacune des expressions suivantes.

$A = 8x - 5 + 3x$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$B = 4a \times 3a$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$C = 2x - 3x^2 - 8x + 6 + 7x^2$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$D = 12x^2 + 2 - 3x \times 2x + 4 \times 2 + 9x$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2 Développement d'une expression

Développer et réduire chacune des expressions suivantes (en utilisant la distributivité).

$E = x(2x - 3)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F = -5x(-3 + 4x)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$G = (2x + 1)(4 + x)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$H = (5 - 3x)(-2 + 3x)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3 Factorisation d'une expression

Factoriser les expressions suivantes (en utilisant la distributivité).

$K = 5x - 42x^2$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$L = 10x + 25x^2$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$M = 12t^2 - 4t$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$N = 2x + 4x^2 + 8x^2$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4 Suppression de parenthèses

Récrire les expressions suivantes sous forme développée et réduite (sans parenthèse).

$S = (2 + x) + (-5 + 3x)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$T = 8x + (1 - x) - (3 - 2x)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Besoin de te rafraîchir la mémoire?

LES EQUATIONS

TESTER UNE EGALITE

Pour savoir si un nombre est solution d'une équation,

on peut remplacer l'inconnue par ce nombre et tester l'égalité.

Exemple : on considère l'équation : $-2x + 4 = x^2 + 1$

Pour savoir si -3 est solution de cette équation, on calcule :

D'une part : $-2 \times (-3) + 4 = \mathbf{10}$ D'autre part : $(-3)^2 + 1 = \mathbf{10}$

L'égalité est vérifiée, donc -3 est solution de cette équation.

PREMIER DEGRE

Pour résoudre une équation du premier degré, il faut isoler l'inconnue.

Exemple :

$$12x - 3 = 8x + 9$$
$$12x - 3 - 8x = 8x + 9 - 8x$$
$$4x - 3 = 9$$
$$4x - 3 + 3 = 9 + 3$$
$$4x = 12$$
$$4x \div 4 = 12 \div 4$$
$$x = 3$$

SECOND DEGRE

Équations produit nul $A(x) \times B(x) = 0$

Exemples : $(x + 3)(x - 2) = 0$ si et seulement si $x + 3 = 0$ **OU** $x - 2 = 0$

Ainsi cette équation a deux solutions : -3 et 2.

Remarque : il est parfois nécessaire de factoriser!

- En recherchant un facteur commun
- En utilisant une identité remarquable : $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Exemple : $x^2 = 17$

$x^2 - 17 = 0$

$(x + \sqrt{17})(x - \sqrt{17}) = 0$

On reconnaît une équation produit nul.

Ainsi, cette équation a deux solutions : $\sqrt{17}$ et $-\sqrt{17}$

1 Test d'égalité

On considère l'équation $2x^2 - 3 = 3 - 4x$.

① Le nombre 2 est-il solution de cette équation ?

D'une part : ....

D'autre part : ....

On en conclut que ....

② Le nombre -3 est-il solution de cette équation ?

D'une part : ....

D'autre part : ....

On en conclut que ....

2 Équations du 1^er^ degré

Résoudre les équations suivantes.

$$5x + 4 = 2x - 8$$

....

....

....

....

$$-8x + 7 = 3x - 1$$

....

....

....

....

3 Équations du 2^nd^ degré

Résoudre les équations suivantes (déterminer *toutes* les solutions).

$$(x + 1)(x - 8) = 0$$

....

....

$$(2x + 5)(15 - 5x) = 0$$

....

....

$$x^2 = 9$$

....

....

....

....

$$x^2 + 3 = 0$$

....

....

....

....

Dans chaque cas, factoriser le membre de gauche puis résoudre l'équation.

$$6x^2 - 3x = 0$$

....

....

....

....

$$4x^2 - 9 = 0$$

....

....

....

....