PROPOSITION DE SOLUTION

Partie 1 : Premiers exemples.

1) Les longueurs données s'obtiennent par application du théorème de Pythagore.

2) On a : $17 = 1^2 + 4^2$; $32 = 4^2 + 4^2$ et $45 = 3^2 + 6^2$ donc $\sqrt{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{32} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{45} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3) Soit $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ on a : $N = x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ d'où $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ (ou bien par symétrie des triangles $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$)

Partie 2 : Longueurs deux fois traçables.

1) On a $9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$ et $7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ donc $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2) $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$ donc $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ donc $\sqrt{50} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ donc $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3) *a*) $N_2 = 5 \times 2^2 + 5 = 25$ donc $\sqrt{N_2} = \sqrt{25}$, deux fois traçable d'après 2) précédent.

b) $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (k^2 - 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix}$

$(2k - 1)^2 + (k + 2)^2 = (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 + 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$

Il a été démontré que $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$, il reste donc à vérifier les conditions de la définition :

D'une part $(2k + 1) \geq (k - 2)$ car $k \geq -3$ car $k \geq 3$

et $(2k - 1) \geq (k + 2)$ car $k \geq 3$

Et d'autre part $\begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$ car $(2k + 1) \neq (2k - 1)$ (ou aussi $(k - 2) \neq (k + 2)$)

Donc $\sqrt{N_k}$ est bien deux fois traçable.

c) La réciproque est fausse car $\sqrt{65}$ est deux fois traçable alors que 65 n'est pas de la forme $5k^2 + 5$ car (N_k) est croissante avec $N_2 = 25$; $N_3 = 50$ et $N_4 = 85$ (ou $65 = 5k^2 + 5$ donne $k = \sqrt{12}$ qui n'est pas un entier naturel).

Partie 3 : Etude des longueurs plusieurs fois traçables

1) Un nombre premier N a pour uniques diviseurs 1 et N, il s'écrit donc uniquement sous la forme des produits $1 \times N$ ou $N \times 1$. Si N est deux fois traçable, d'après la propriété admise, $N =(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ donc $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ et $c^2 + d^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ donc N s'écrit comme un produit de deux facteurs distincts de 1, donc N n'est pas premier.

2) Pour déterminer les deux plus petits entiers N non multiples de 5 de la forme $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ il faut (et il suffit) qu'aucun des facteurs $(a^2 + b^2)$ et $(c^2 + d^2)$ ne soit divisible par 5.

Par commutativité du produit, on peut supposer que $(a^2 + b^2) \leq (c^2 + d^2)$ (pour ordonner la recherche) puis considérer les plus petites valeurs de $(a^2 + b^2)$ successives telles que $a > b \geq 1$:

$(a ; b) = (2 ; 1)$: $a^2 + b^2 = 5$, à exclure car multiple de 5

$(a ; b) = (3 ; 1)$: $a^2 + b^2 = 10$, à exclure car multiple de 5

(a ; b) = (3 ; 2) : $a^2 + b^2 = 13$ et on associe ensuite le plus petit facteur pour ($c^2 + d^2$) possible :

(c ; d) = (3 ; 2) : $c^2 + d^2 = 13$ d'où $N = 13 \times 13 = 169$

ou bien (c ; d) = (4 ; 1) : $c^2 + d^2 = 17$ d'où $N = 13 \times 17 = 221$.

(a ; b) = (4 ; 1) : $a^2 + b^2 = 17$: recherche terminée car alors $c^2 + d^2 \geq 17$ donc N supérieur aux deux précédents.

<u>Pour 169 :</u> Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9+4 \\ |6-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ |0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9-4 \\ 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Pour 221 :</u> Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12+2 \\ |3-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ |-5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12-2 \\ 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3) Il s'agit de vérifier s'il existe a, b, c, d tels que $2023 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

Par commutativité du produit, on peut supposer pour ordonner la recherche que $(a^2 + b^2) \leq (c^2 + d^2)$.

Or $2023 = 7 \times 17 \times 17$.

Comme $a^2 + b^2 \neq 1$ (car $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$), les seules valeurs possibles pour $(a^2 + b^2)$ sont donc :

$(a^2 + b^2) = 7$: non (autrement dit $\sqrt{7}$ n'est pas traçable)

$(a^2 + b^2) = 17$ d'où $(a ; b) = (4 ; 1)$

et alors on doit avoir $(c^2 + d^2) = 7 \times 17 = 119$ (autrement dit vérifions si $\sqrt{119}$ est traçable)

En calculant $(119 - d^2)$ avec $1 \leq d \leq 7$, on n'obtient pas de carré d'entier (Et si $d \geq 8$, avec $c^2 + d^2 = 119$, on obtient $c^2 < d^2$: à exclure car par définition c > d) donc $(c^2 + d^2) \neq 119$.

Conclusion : $\sqrt{2023}$ n'est pas deux fois traçable.

4) 325 = 5 x 65 avec $\sqrt{5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc $5 = 2^2 + 1^2$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ donc $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$

Il vient, en appliquant la formule donnée avec :

- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16+1 \\ |2-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ |-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{17} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16-1 \\ 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14+4 \\ |8-7| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ |1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14-4 \\ 8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$

Donc $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Partie 4 : Application à une configuration dans l'espace.</u>

1) Dans OBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $OC^2 = OB^2 + BC^2$

Et dans OAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2$

Donc $OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2 *) a)* Si $z \leq 5$ alors $x \leq y \leq z \leq 5$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$;

et si $z > 9$ alors $x^2 + y^2 + z^2 > 9^2 = 81$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$

donc $6 \leq z \leq 9$

b) Soit P(x , y , z) : P appartient à S si et seulement si OP² = 9² donc si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

On cherche donc les P(x ; y ; z) de coordonnées entières tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

➔ *Supposons d'abord x , y , z entiers naturels avec $x \leq y \leq z$* (pour ordonner la recherche).

On a donc $6 \leq z \leq 9$:

$z = 6$: $x^2 + y^2 + 36 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 45$ d'où (x ; y) = (3 ; 6) d'où le point P_6 = (3 ; 6 ; 6)

$z = 7$: $x^2 + y^2 + 49 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 32$ d'où (x ; y) = (4 ; 4) d'où le point P_7 = (4 ; 4 ; 7)

$z = 8$: $x^2 + y^2 + 64 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 17$ d'où (x ; y) = (1 ; 4) d'où le point P_8 = (1 ; 4 ; 8)

$z = 9$: $x^2 + y^2 + 81 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 0$ d'où (x ; y) = (0 ; 0) d'où le point P_9 = (0 ; 0 ; 9)

(Remarque : on retrouve les différentes valeurs de (x ; y) obtenues en Partie 1)

➔ *Par permutation de (x , y , z) on obtient : 3 points avec P_6 ; 3 points avec P_7 ; 6 points avec P_8 et 3 points avec P_9 soit exactement 3 + 3 + 6 + 3 = 15 points de coordonnées entières <u>naturelles</u> situés sur la sphère S.*

➔ *Pour obtenir les coordonnées pouvant être négatives il suffit d'effectuer des changements de signes et donc d'appliquer aux coordonnées de <u>chacun</u> des points associées à P_6, P_7, P_8 précédents un seul signe « - » (d'où 3 autres points) ou deux signes « - » (d'où 3 autres points) ou trois signes « - » (d'où 1 autre point) soit 7 <u>autres</u> points en tout de coordonnées entières relatives obtenus à partir de chacun des 12 points associés à P_6, P_7, P_8.*

Quant aux points associés à P_9, comme 0 = - 0, on ne peut qu'ajouter un signe « - » à la valeur 9 pour obtenir un nouveau point par changement de signe, donc 1 point supplémentaire pour chacun des 3 points associés à P_9.

Le nombre total de points à coordonnées entières appartenant à S est donc égal à $12 \times 8 + 3 \times 2 = 102$.

CQFD