Par hasard, par abole

Thèmes. Parabole, probabilités continues.
Classe. Terminale S.
Logiciels. Logiciel de géométrie dynamique. Tableur.

Énoncé

Soient a et b deux nombres réels distincts de l'intervalle $[-5, 5]$.
On note F le point de coordonnées $(0; a)$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = b$.
A étant un point quelconque de la droite $\mathscr{D}$, on désigne par Δ_A la médiatrice du segment $[FA]$ et par δ_A la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A. On note M le point d'intersection des droites δ_A et Δ_A et I le milieu du segment $[AM]$.
On note $\mathscr{G}$ le lieu des points M lorsque A parcourt $\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$ le lieu des points I lorsque A parcourt $\mathscr{D}$.

Question 1- (a) A quelle(s) condition(s) sur a et b la courbe $\mathscr{G}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
(b) A quelle(s) condition(s) sur a et b la courbe $\mathscr{F}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

Question 2- On choisit au hasard de façon indépendante les nombres a et b selon la loi uniforme dans $[-5; 5]$.
(a) Quelle est la probabilité que $\mathscr{G}$ ne coupe pas l'axe des abscisses ?
(b) Quelle est la probabilité que $\mathscr{F}$ ne coupe pas l'axe des abscisses ?

Tâche 1- Vous tenterez de répondre expérimentalement à la question 1 à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Tâche 2- Rédigez une démonstration des conjectures faites.

Tâche 3- Vous tenterez de répondre expérimentalement à la question 2 à l'aide d'un tableur.

Tâche 4- Dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on définit les points $P(-5; -5)$, $Q(5; -5)$, $R(5; 5)$, $S(-5; 5)$. Appelons probabilité uniforme sur le carré $PQRS$ la probabilité définie par

$$P(E) = \frac{\text{aire de } E}{\text{aire de } PQRS} \quad \text{où } E \text{ est une partie du carré } PQRS$$

En admettant que le choix au hasard des deux réels a et b revient à choisir au hasard un point $M(a; b)$ dans le carré $PRQS$ selon cette loi uniforme, retrouvez par un calcul d'aire les probabilités obtenues expérimentalement .

Analyse *a priori*

D'un point de vue mathématique

1. – Définition d'une courbe d'une fonction comme lieu géométrique d'une construction.
   – Passage de la situation géométrique à la détermination de la fonction.

  - Calculs de distances, résolution d'équations, calcul algébrique.
  - Trinôme du second degré : relation entre le trinôme et la courbe représentative de la fonction trinôme. Coordonnées du sommet de la parabole. Intersection avec les axes de coordonnées.
  - Équations de droites, régionnement du plan – partir d'une relation algébrique pour l'interpréter en terme de régionnement du plan –

2. Probabilités.
   - Approche expérimentale d'une probabilité continue.
   - Définition d'un univers de probabilité.
   - Probabilité d'un événement comme un rapport d'aires.
   - Probabilité d'un point dans une probabilité continue.

D'un point de vue instrumental

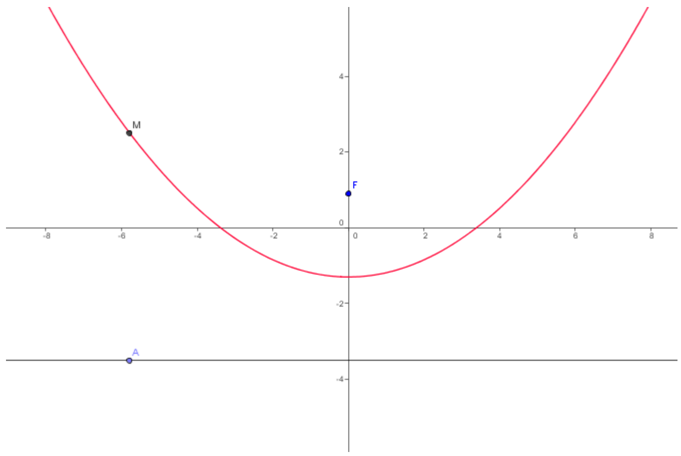
- Constructions élémentaires de géométrie plane sur un logiciel de géométrie dynamique.
- Lieu géométrique
- Une difficulté est l'existence de deux paramètres dans ce problème ; lequel bouger ? Une compétence travaillée est alors de fixer un des deux paramètres et de faire bouger le second pour faire apparaître des propriétés qui peuvent être validées par un mouvement du deuxième paramètre : la parabole a ses branches tournées vers le bas lorsque $a < b$ et vers le haut dans le cas contraire.
- Sur le tableur : écriture d'une formule utilisant la fonction « hasard » du tableur utilisé. Utilisation de la fonction « si ».

Corrigé, commentaires

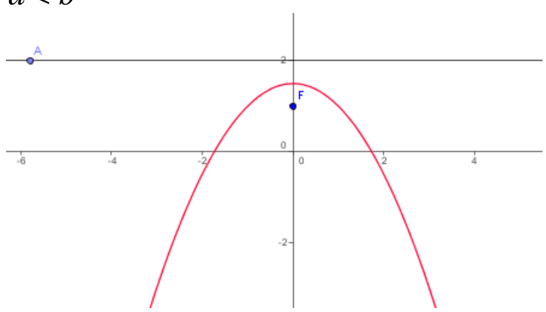
1 Approche avec geogebra pour le lieu $\mathscr{G}$

1. Il semble que $\mathscr{G}$ soit une parabole.
2. On conjecture et vérifie facilement que le point Ω de $\mathscr{G} \cap \left(O; \vec{j}\right)$ a pour coordonnées $\left(0; \dfrac{a+b}{2}\right)$. On conjecture également qu'il s'agit du sommet de la parabole (avec confirmation pour raison de symétrie).
3. Il semble que l'on ait deux cas à envisager :

   Cas 1- $a > b$

   Cas 2- $a < b$

4. Dans le cas 1 ($a > b$), la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses lorsque le sommet a une ordonnée strictement positive : $a + b > 0$.
5. Dans le cas 2 ($a < b$), la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses lorsque le sommet a une ordonnée strictement négative : $a + b < 0$.

2 Approche avec geogebra pour le lieu $\mathscr{F}$

1. Il semble que $\mathscr{F}$ soit une parabole.
2. On conjecture que le point Ω' de $\mathscr{F} \cap \left(O; \vec{j}\right)$ a pour coordonnées $\left(0; \dfrac{a+3b}{2}\right)$ (milieu de $[A_0\Omega]$ où $A_0(0; b)$). On conjecture également qu'il s'agit du sommet de la parabole.

3. Il semble que l'on ait les mêmes deux cas à envisager :

   Cas 1- $a > b$

   Cas 2- $a < b$
4. Dans le cas 1 ($a > b$), la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses lorsque le sommet a une ordonnée strictement positive : $a+3b > 0$.
5. Dans le cas 2 ($a < b$), la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses lorsque le sommet a une ordonnée strictement négative : $a+3b < 0$.

3 Probabilité demandée avec un tableur (lieu $\mathscr{G}$)

Avec les formules suivantes :

	A	B	C	D
1	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A1+B1)*(A1-B1)>0;1;0)	=SOMME(C1:C65536)/65536
2	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A2+B2)*(A2-B2)>0;1;0)	
3	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A3+B3)*(A3-B3)>0;1;0)	
4	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A4+B4)*(A4-B4)>0;1;0)	
5	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A5+B5)*(A5-B5)>0;1;0)	

on obtient par exemple :

	A	B	C	D
1	-3,22	-2,2	1	0,5
2	3,31	1,22	1	
3	-2,22	-0,23	1	
4	-3,96	-0,21	1	
5	2,37	4,25	0	
6	4,64	3,86	1	
7	0,97	3,06	0	
8	1,64	-3,61	0	
9	-3,18	-0,64	1	
10	-0,28	4,6	0	

On peut soit affiner pour tenir compte de $a \neq b$, soit justifier après coup que cet événement est de probabilité nulle.

4 Probabilité demandée avec un tableur (lieu $\mathscr{F}$)

Avec les formules suivantes :

	A	B	C	D
1	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A1+3*B1)*(A1-B1)>0;1;0)	=SOMME(C1:C65536)/65536
2	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A2+3*B2)*(A2-B2)>0;1;0)	
3	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A3+3*B3)*(A3-B3)>0;1;0)	
4	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A4+3*B4)*(A4-B4)>0;1;0)	
5	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A5+3*B5)*(A5-B5)>0;1;0)	
6	=10*ALEA()-5	=10*ALEA()-5	=SI((A6+3*B6)*(A6-B6)>0;1;0)	

on obtient par exemple :

	A	B	C	D
1	-2,43	4,71	0	0,33
2	1,24	-2,2	0	
3	2,78	1,79	1	
4	-1,25	1,21	0	
5	0,99	1,45	0	
6	3,93	3,68	1	
7	0,21	-3,63	0	
8	2,45	-1,89	0	
9	-5	1,44	1	
10	-3,04	-1,99	1	
11	1,65	4,14	0	

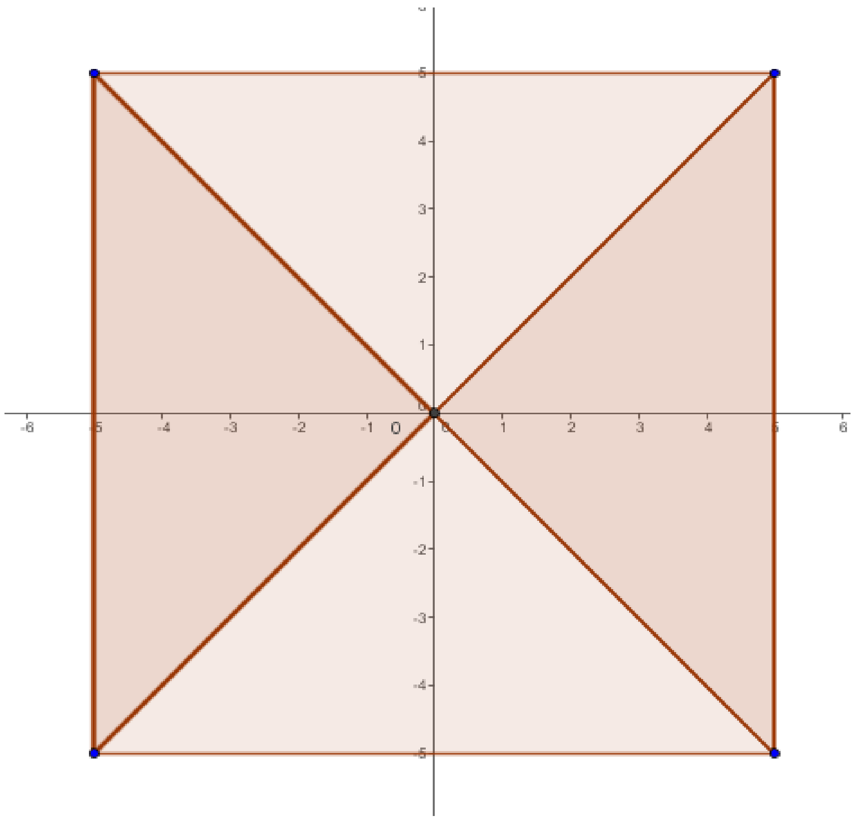
5 Une résolution (lieu $\mathscr{G}$)

1. On remarque d'abord que $\mathscr{G}$ est l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}$ et de F.
2. On en déduit qu'un point $M(x; y)$ est un point de $\mathscr{G}$ ssi $x^2 + (y-a)^2 = (y-b)^2$. Soit :

$$M(x; y) \in \mathscr{G} \iff y = \frac{1}{2\,(a-b)}x^2 + \frac{a+b}{2}$$

3. On a donc bien affaire à une parabole et la sélection entre « coupe » ou « coupe pas » l'axe des abscisses conjecturée plus haut est validée.
4. On peut traduire la question par :
   On choisit un couple $(a; b)$ au hasard dans le carré $[-5; 5] \times [-5; 5]$ privé de la diagonale. Quelle est la probabilité que ce couple vérifie

$$\begin{cases} a+b>0 \text{ et } a-b>0 \\ \text{ou} \\ a+b<0 \text{ et } a-b<0 \end{cases} \qquad ?$$

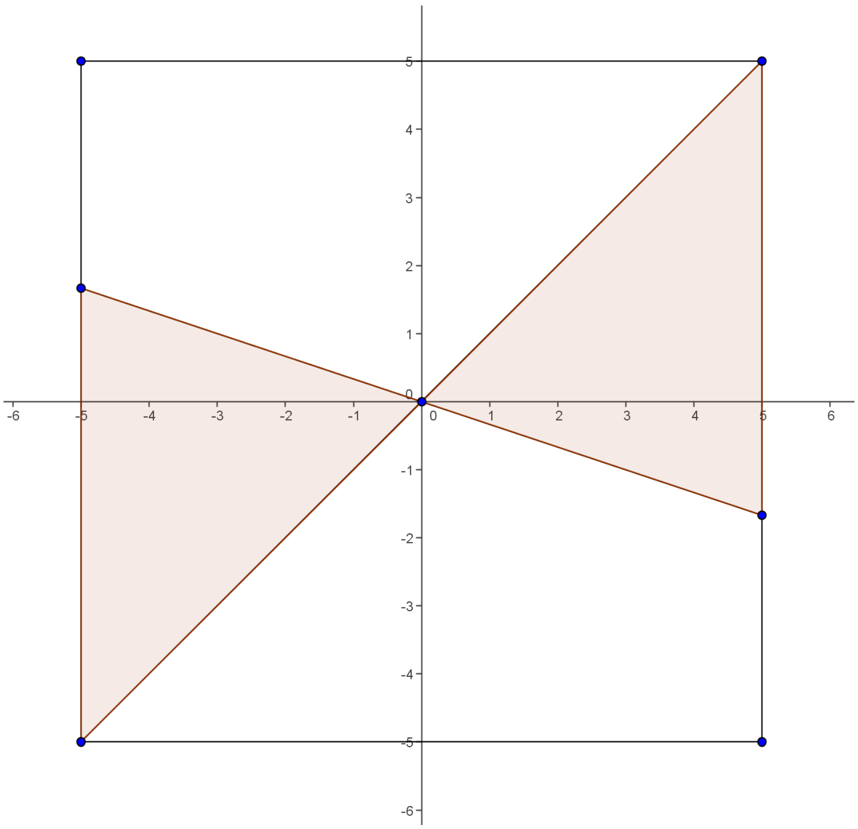


Cette probabilité est de : $\dfrac{10 \times 5}{10 \times 10} = 0{,}5$

6 Une résolution (lieu $\mathscr{F}$)

1. En utilisant :
$$(x_M ; y_M) = (2x_I - x_A ; 2y_I - y_A)$$
et l'équation
$$\mathscr{G} : \ y = \frac{1}{2(a-b)} x^2 + \frac{a+b}{2}$$
on obtient :
$$I(x;y) \in \mathscr{F} \iff y = \frac{1}{4(a-b)} x^2 + \frac{a+3b}{2}$$

2. On peut traduire la question de probabilité par :
On choisit un couple $(a;b)$ au hasard dans le carré $[-5;5] \times [-5;5]$ privé de la diagonale. Quelle est la probabilité que ce couple vérifie
$$\begin{cases} a+3b > 0 \text{ et } a-b > 0 \\ \text{ou} \\ a+3b < 0 \text{ et } a-b < 0 \end{cases} \qquad ?$$



Cette probabilité est de : $\dfrac{5\times 5+5\times \frac{5}{3}}{10\times 10}=\dfrac{1}{3}$