

Triangles rectangles

Dans les programmes

1. fonctions 1 : maximum d'une fonction sur un intervalle, transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.
2. fonctions 2 : Travail sur les différentes formes d'une expression algébrique (développée, factorisée, réduite).
3. Algorithmique : boucle, instruction conditionnelle, calcul des valeurs d'une fonction.

Une personne dispose de 40 mètres de grillage et veut délimiter un enclos rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous :



Le segment épais est un mur existant, le trait continu fin représente les 40 mètres de grillage et $[AE]$ est une ouverture de 2 mètres.

On pose $CD = x$ et $f(x) =$ aire de l'enclos.

1. Exprimer BC en fonction de x .
2. Expliquer pourquoi on doit avoir $x \in]0;21[$.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
4. A l'aide d'un programme, déterminer une valeur de x , au cm près, correspondant à un enclos d'aire maximale.
5. Confirmer le résultat obtenu à l'aide d'un grapheur.
6. Soit g une fonction de la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$. Entrer le programme suivant :

Xcas

```
forme_cano(a,b,c) := {  
  local alpha,beta;  
  alpha := -b/(2*a);  
  beta := a*alpha^2 + b*alpha + c;  
  return [a, "(x-", alpha, ")^2+", beta]  
};;
```

- (a) Quelle est la sortie avec l'entrée $(a, b, c) = (2, 3, 1)$? Vérifier que l'expression obtenue en sortie est égale, pour toute valeur réelle de x , à $g(x)$.



(b) Même question avec l'entrée $(a, b, c) = (-1, 0, 2)$.

(c) Vérifier que l'expression obtenue en sortie sera toujours égale (pour toute valeur réelle de x) à $g(x)$.

7. A l'aide de l'algorithme de la question précédente, déterminer la valeur (exacte) de x correspondant à un enclos d'aire maximale.

8. On considère la fonction h définie sur $[0;21]$ par :

$$h(x) = -x^2 + 9\sqrt{3}x + 30$$

Lequel des deux algorithmes utilisés ci-dessus vous permet de déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction h sur $[0;21]$? Détaillez votre réponse.

Éléments de réponses – XCAS

1. On a $CD + BC + AB = 40$ soit $x + BC + (x - 2) = 40$ et $BC = 42 - 2x$.
2. $x = CD > 0$ et $42 - 2x = BC > 0$, donc $x \in]0; 21[$.
3. $f(x) = 2x \times (21 - x) = -2x^2 + 42x$
- 4.

Xcas

```
enclos() := {  
  /* recherche du max en tenant compte du caractère "concret" du pb :  
  une précision au-delà du cm serait illusoire ! */  
  local k, aire_interm, aire_max, x_m;  
  aire_max := 0; x_m := 0;  
  pour k de 0 jusque 21 pas 0.01 faire  
    aire_interm := -2*k^2 + 42*k;  
    si aire_interm > aire_max alors aire_max := aire_interm; x_m := k; fsi;  
  fpour;  
  return ["L'aire max est de", aire_max, "pour x =", x_m]  
};;
```

On obtient rapidement une réponse : aire maximale de 220,5 pour $x = 10,5$.

On peut alors se poser le problème de l'unicité :

Xcas

```
unicite() := {  
  local k, aire_max, liste_solu, aire_interm;  
  aire_max := 220.5;  
  liste_solu := [];  
  pour k de 0 jusque 21 pas 0.01 faire  
    aire_interm := -2*k^2 + 42*k;  
    si aire_interm == aire_max alors liste_solu := append(liste_solu, [k]); fsi;  
  fpour;  
  return liste_solu;  
};;
```

Seule la valeur 10,5 donne un maximum parmi les nombres testés.

5. grapheur.
6. Avec le petit programme xcas, on obtient :

forme_cano(-2,42,0)

$-2 \left(x - \frac{21}{2}\right)^2 + \frac{441}{2}$
--

f atteint son max en $x = 10,5$. On a alors $BC = 21$, $CD = 10,5$ et $f(10,5) = 220,5$ (en m^2).

On peut aussi avec Xcas suggérer la démarche suivante :



```
f(x):=-2*x^2+42*x;factor(f(x)-f(10.5))
```

```
( Done, -2.0*(x-10.5)^2 )
```

7. On a :

$$h(x) = -\left(x - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{363}{4}$$

La question permet un retour sur la distinction "valeurs approchées", "valeur exacte". Et éventuellement sur la distinction "algorithme numérique", "algorithme formel", par exemple le programme

```
program : canon
```

```
Prompt A, B, C
```

sur calculatrice ti :

```
-B/(2 * A) → S
```

```
A * S^2 + B * S + C → T
```

```
Disp A, "(X-", S, ")^2+", T
```

ne renverra pas les valeurs exactes pour cette ques-

tion et rend inopérante une simple procédure de vérification de l'affichage machine.