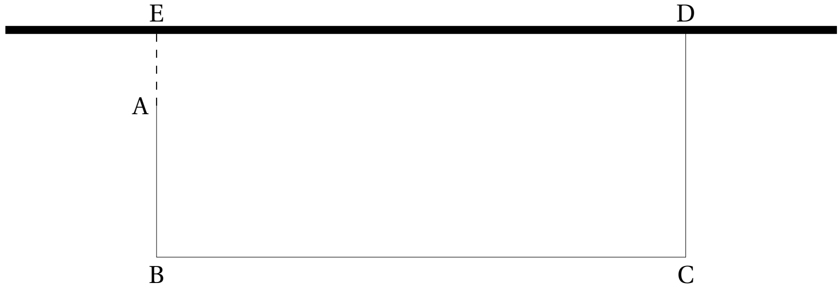
# Triangles rectangles

**Dans les programmes**

1. fonctions 1 : maximum d'une fonction sur un intervalle, transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.
2. fonctions 2 : Travail sur les différentes formes d'une expression algébrique (développée, factorisée, réduite).
3. Algorithmique : boucle, instruction conditionnelle, calcul des valeurs d'une fonction.

Une personne dispose de 40 mètres de grillage et veut délimiter un enclos rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous :




Le segment épais est un mur existant, le trait continu fin représente les 40 mètres de grillage et $[AE]$ est une ouverture de 2 mètres.
On pose $CD = x$ et $f(x) =$ aire de l'enclos.

1. Exprimer $BC$ en fonction de $x$.
2. Expliquer pourquoi on doit avoir $x \in ]0;21[$.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.
4. A l'aide d'un programme, déterminer une valeur de $x$, au cm près, correspondant à un enclos d'aire maximale.
5. Confirmer le résultat obtenu à l'aide d'un grapheur.
6. Soit $g$ une fonction de la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$. Entrer le programme suivant :

**Xcas**

```
forme_cano(a,b,c):={
local alpha,beta;
alpha:=-b/(2*a);
beta:=a*alpha^2+b*alpha+c;
return [a,"(x-",alpha,")^2+",beta]
}:;
```

   (a) Quelle est la sortie avec l'entrée $(a, b, c) = (2, 3, 1)$ ? Vérifier que l'expression obtenue en sortie est égale, pour toute valeur réelle de $x$, à $g(x)$.

(b) Même question avec l'entrée $(a, b, c) = (-1, 0, 2)$.

(c) Vérifier que l'expression obtenue en sortie sera toujours égale (pour toute valeur réelle de $x$) à $g(x)$.

7. A l'aide de l'algorithme de la question précédente, déterminer la valeur (exacte) de $x$ correspondant à un enclos d'aire maximale.
8. On considère la fonction $h$ définie sur $[0;21]$ par :

$$h(x) = -x^2 + 9\sqrt{3}\,x + 30$$

Lequel des deux algorithmes utilisés ci-dessus vous permet de déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction $h$ sur $[0;21]$ ? Détaillez votre réponse.

# Éléments de réponses – XCAS

1. On a $CD + BC + AB = 40$ soit $x + BC + (x - 2) = 40$ et $BC = 42 - 2x$.
2. $x = CD > 0$ et $42 - 2x = BC > 0$, donc $x \in ]0;21[$.
3. $f(x) = 2x \times (21 - x) = -2x^2 + 42x$
4. 

**Xcas**

```
enclos():={
/* recherche du max en tenant compte du caractère "concret" du pb :
une précision au-delà du cm serait illusoire ! */
local k,aire_interm,aire_max,x_m;
aire_max:=0;x_m:=0;
pour k de 0 jusque 21 pas 0.01 faire
aire_interm:=-2*k^2+42*k;
si aire_interm>aire_max alors aire_max:=aire_interm;x_m:=k;fsi;
fpour;
return ["L'aire max est de",aire_max,"pour x=",x_m]
}:;
```

On obtient rapidement une réponse : aire maximale de 220,5 pour $x = 10{,}5$.

On peut alors se poser le problème de l'unicité :

**Xcas**

```
unicite():={
local k,aire_max,liste_solu,aire_interm;
aire_max:=220.5;
liste_solu:=[];
pour k de 0 jusque 21  pas 0.01 faire
aire_interm:=-2*k^2+42*k;
si aire_interm==aire_max alors liste_solu:=append(liste_solu,[k]);fsi;
fpour;
return liste_solu;
}:;
```

Seule la valeur 10,5 donne un maximum parmi les nombres testés.

5. grapheur.
6. Avec le petit programme xcas, on obtient :

```
forme_cano(-2,42,0)
```

$$-2\ (x-\frac{21}{2})\hat{}2+\frac{441}{2}$$

$f$ atteint son max en $x = 10{,}5$. On a alors $BC = 21$, $CD = 10{,}5$ et $f(10{,}5) = 220{,}5$ (en m$^2$).

On peut aussi avec Xcas suggérer la démarche suivante :

```
f(x):=-2*x^2+42*x:;factor(f(x)-f(10.5))
                                        ( Done,  -2.0·(x-10.5)^2  )
```

7. On a :

$$h(x) = -\left(x - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{363}{4}$$

La question permet un retour sur la distinction "valeurs approchées", "valeur exacte" . Et éventuellement sur la distinction "algorithme numérique", "algorithme formel", par exemple le programme sur calculatrice ti :

| program : canon |
|---|
| Prompt $A, B, C$ |
| $-B/(2*A) \longrightarrow S$ |
| $A*S\hat{}2+B*S+C \longrightarrow T$ |
| Disp A,"$*$(X$-$",S,")$\hat{}$2+",T |

ne renverra pas les valeurs exactes pour cette question et rend inopérante une simple procédure de vérification de l'affichage machine.