POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Formation des professeurs titulaires 1ère année - journée du 22 mars 2019

Réforme du lycée et conséquences pédagogiques

académie Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Sommaire

1. Quelques mots sur la réforme du lycée et conséquences sur les pratiques de classe en collège et lycée.

2. Retour sur les expérimentations liées à la différenciation dans les classes.

3. Pourquoi démontrer ?

4. Que démontrer ? Comment démontrer ? Avec quelles méthodes ?

5. Comment intégrer les repères historiques dans les enseignements ?

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Temps 1 : Quelques mots sur la réforme du lycée

Quelles conséquences sur les pratiques de classe en collège et lycée ?

académie Lyon
RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES
MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Réforme du lycée

Seconde Générale et technologique : enseignement commun de 4h

VOIE GENERALE
Première générale :
Enseignement de spécialité : 4 h

Terminale générale
Enseignement de spécialité : 6h
Enseignement optionnel de mathématiques expertes : 3h
Enseignement optionnel de mathématiques complémentaires : 3h

VOIE TECHNOLOGIQUE
Tronc commun à toutes les séries (STMG, ST2S, STHR,STI2D, STL, STD2A)
Enseignement de spécialité « physique-chimie et mathématiques » (STI2D, STL)

Réforme du lycée

Implications pédagogiques :

- Développer les leviers de différenciation
- Accorder davantage de place à l’oral
- Investir le champ de la démonstration et des méthodes de raisonnement
- Intégrer les repères historiques
- Développer les automatismes
- Intégrer l’algorithmique dans le cours de mathématiques

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Temps 2 : Expérimentations liées à la différenciation dans les classes

académie Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Que peut-on différencier ?

- **Les contenus :**
  - **Varier les types de situations**

  Gammes calculatoires, problème guidé, problème à prise d'initiative, activités mentales, activités d'entrée dans les notions, QCM, jeux mathématiques, exercices fléchés dans un DM …)

  - **Varier le niveau de complexité**

  Partir d'exemples

  Reformuler ou faire reformuler

  Autoriser ou non la calculatrice

  Conserver de la richesse dans les énoncés simples….

  Exemple : construire tous les triangles de périmètre 12 cm dont les côtés mesurent un nombre entier de centimètres.

  - **Proposer des tâches à prise d'initiative permettant de varier les démarches de résolution.**

  - **Varier le support de l'énoncé : texte, tableau, schéma, images, son, vidéos.**

Que peut-on différencier ?

- **Les modalités d'organisation :**

  - **Aménager le travail dans la classe**

  Travail individuel, en groupes homogènes, en groupes hétérogènes, en îlots.

  - **Travailler de manière collaborative**

  Tutorat entre pairs (avec des précautions à prendre), réalisation d'une production commune, répartition des tâches.

  - **Pratiquer des activités mentales**

  Aide au diagnostic, entretien des acquis, acquisition d'automatismes

  - **Rythmer la séance en variant la nature des activités**

  - **Accéder aux ressources et outils ou non**

Que peut-on différencier ?

- Les processus d’apprentissage :

  - Guider les activités

  Problèmes ouverts avec coups de pouce éventuels

  Plus ou moins d’autonomie selon les besoins

  - Accompagner les élèves

  S’assurer que chacun a pu s’engager dans la tâche

  Aider certains à surmonter les obstacles (table d’appui)

  - Susciter le débat

  Confronter les idées

  Valider et valoriser les stratégies

  Adopter une stratégie commune

  - Mettre en scène (scénario, explicitation, recours au numérique..)

  - S’adapter aux différents profils des élèves (Visuels, auditifs, kinesthésiques)

Que peut-on différencier ?

- Les productions :

  - Débat oral
  - Document rendu sous forme
    - Ecrite (manuscrite)
    - Numérique
  - Forme des productions et valorisation
    - Exposés
    - Recherches documentaires
    - Constructions

  - Destination des productions pour l'élève, pour le professeur, affichage, exposition, jury

  - Différencier les évaluations : exercices supplémentaires, exercices au choix, exercices à la carte, temps et supports différents, coups de pouce, contenus adaptés

Expérimentations liées à la différenciation

Présenter les expérimentations que vous avez menées dans votre classe.

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Temps 3 :
Pourquoi démontrer ?

académie Lyon
RÉGION ACADÉMIQUE AUVERGNE-RHÔNE-ALPES
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Pourquoi démontrer ?

Atelier :

Chercher des conjectures fausses que vous pourriez proposer à vos élèves.

Pourquoi démontrer ?

1er énoncé : pour tout entier n entier naturel, $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.

Pourquoi démontrer ?

2e énoncé : Les trois programmes de calcul sont-ils équivalents ?

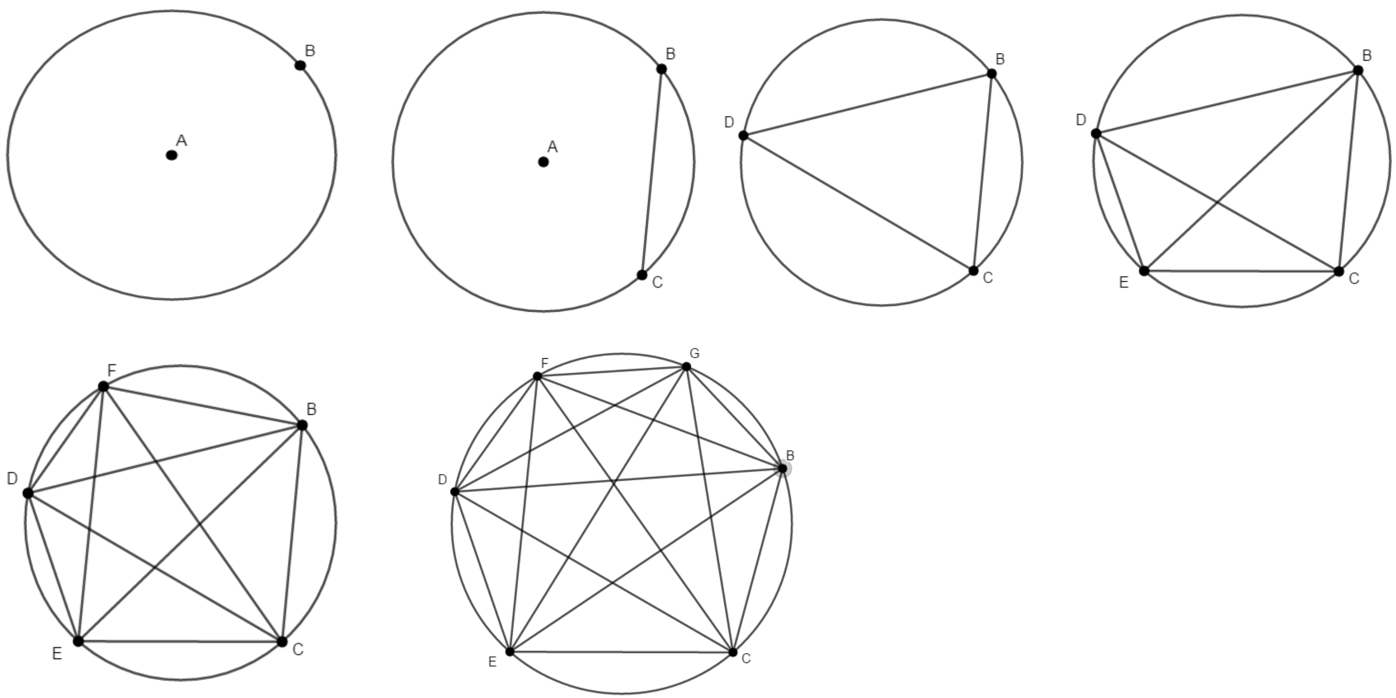
Programme de calcul n°1 :
Choisir un nombre. Lui Ajouter 4.
Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ.
Soustraire 5.

Programme de calcul n°2 :
Choisir un nombre. Lui Ajouter 2.
Prendre le carré du résultat précédent.
Soustraire 9.

Programme de calcul n°3 :
Choisir un nombre. Prendre son double. Lui ajouter 8.
Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ.
Soustraire 10.

Pourquoi démontrer ?

3e énoncé : On place n points sur un cercle (avec n entier naturel supérieur ou égal à 1). Comment de régions les cordes entre ces n points forment-elles à l'intérieur du cercle ?

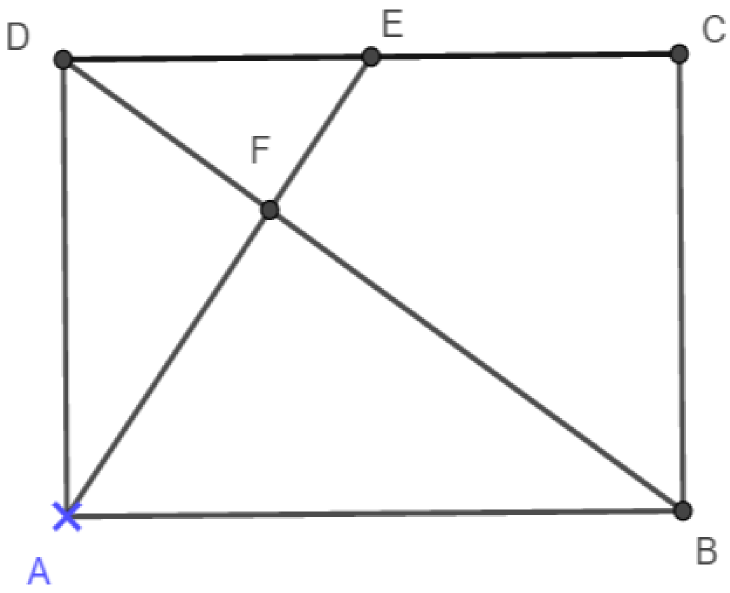


Pourquoi démontrer ?

4^e énoncé : ABCD est un rectangle de dimensions 19,8 et 14 cm. E est le milieu du segment [DC]. Que peut-on dire des droites (DB) et (AE) ? Justifier

Pourquoi démontrer ?

4e énoncé : ABCD est un rectangle de dimensions 19,8 et 14 cm. E est le milieu du segment [DC].
Que peut-on dire des droites (DB) et (AE) ? Justifier



Pourquoi démontrer ?

5e énoncé : Est-ce que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$?

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Temps 4 :
Que démontrer ?
Comment démontrer ?
Avec quelles méthodes ?

académie Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Rapport Villani – Torossian : 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques

6

Le cours

Rééquilibrer les séances d'enseignement de mathématiques : redonner leur place

- au cours structuré et à sa trace écrite ;
- à la notion de preuve ;
- aux apprentissages explicites.

Programme du cycle 4 Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

Que démontrer ?

ATELIER :

1. Lister des démonstrations de cours qui peuvent être traitées au collège.

2. Proposer une démonstration possible pour une des règles fractionnaires, à faire avec les élèves.

- $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$
- $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Fraction : de l’opérateur de partage au nombre quotient

<u>Extrait du document ressource :</u> « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 »

« En dernière année de cycle 3, la fraction $\frac{a}{b}$ où a est un nombre entier et b est nombre entier non nul est définie comme étant le nombre qui multiplié par b donne a ; il s’agit du quotient de a par b»

Pourquoi développer l’aspect quotient d’une fraction au cycle 3

- Pour démontrer des propriétés du calcul fractionnaire au cycle 4
- Pour rechercher des coefficients de proportionnalité
- Pour faciliter les manipulations algébriques en calcul littéral

André Pressiat
https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/confpressiat/Quotients.pdf

Exemple de preuve d'une propriété de calcul fractionnaire utilisant la notion de quotient

<u>Propriété :</u> simplification des écritures fractionnaires

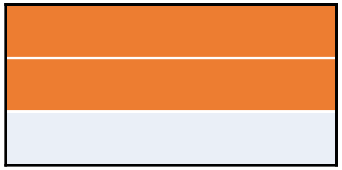
« On ne change pas la valeur d'un quotient en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul. »

On considère deux nombres *a* et *b* avec $b \neq 0$.

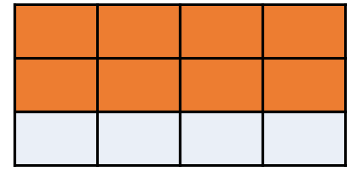
Pour tout nombre $k \neq 0$, on a : $\dfrac{ak}{bk} = \dfrac{a}{b}$

Comment faire percevoir la propriété ? Démontrer la propriété ?

Preuve sur un exemple générique pour montrer que $\dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$



$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$



Démonstration :

Appelons Q le nombre $\frac{2}{3}$. On peut donc écrire $Q = \frac{2}{3}$.

Q est le nombre qui multiplié par 3 donne 2.

$3 \times Q = 2$ *En multipliant ces deux nombres égaux par 4, on obtient encore deux nombres égaux.*

$$4 \times (3 \times Q) = 4 \times 2$$

$$(4 \times 3) \times Q = 4 \times 2$$

$$12 \times Q = 8$$

Q est donc aussi le nombre qui multiplié par 12 donne 8

Q est le nombre qui multiplié par 3 donne 2. $Q = \frac{2}{3}$

Q est donc aussi le nombre qui multiplié par 12 donne 8 . $Q = \frac{8}{12}$

On a donc $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Cette démonstration conduite sur un exemple générique induit d'autres démonstrations impliquant progressivement le calcul littéral.

$$Q = \frac{2}{3}$$

$$3 \times Q = 2$$

En multipliant ces deux nombres égaux par un nombre k non nul, on obtient encore deux nombres égaux.

$$k \times (3 \times Q) = k \times 2$$

$$(k \times 3) \times Q = k \times 2$$

$$(3k) \times Q = 2k$$

$$Q = \frac{2k}{3k}$$

On obtient donc $\frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$ pour tout nombre k non nul.

Cette démonstration inductive s'appuie ***essentiellement*** sur l'aspect quotient d'une fraction.

Remarque : on peut imaginer construire avec les élèves une démonstration sur une autre propriété algébrique du calcul fractionnaire en classe de quatrième par exemple dans l'esprit d'une progression spiralée « verticale ».

Que démontrer ?

En classe de seconde, les démonstrations de cours sont les suivantes :

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal
- Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel
- Pour une valeur numérique de *a,* la somme de deux multiples de *a* est un multiple de *a.*
- Le carré d'un nombre impair est impair.
- Quels que soient les réels positifs *a* et *b,* on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Si *a* et *b* sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- Pour *a* et *b* réels positifs, illustration géométrique de l'égalité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Le projeté orthogonal du point *M* sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point *M.*

Que démontrer ?

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Le projeté orthogonal du point *M* sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point *M.*
- Relation trigonométrique $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.
- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.
- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Que démontrer ?

Atelier :

« Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x, y = x^2, y = x^3$, pour $x \geq 0$. »

- Proposer des objectifs d'apprentissage différents
- Proposer des idées pour aborder la démonstration
- Proposer des approfondissement possibles

Que démontrer ?

Quels objectifs d’apprentissage ?

- Niveau 0 : assimiler le mot de vocabulaire mathématique « comparer »
- Niveau 1 : mettre en évidence la disjonction des cas (formulation de la conjecture)
- Niveau 2 : Comprendre le changement de registre « courbes représentatives » - « écritures algébriques »
- Niveau 3 : Mettre en place l’automatisme : « pour comparer deux réels, une méthode efficace consiste à étudier le signe de la différence de ces deux réels. »

Que démontrer ?

Quels aborder cette démonstration ?

Idée 1 : Comparer un nombre positif avec son carré.

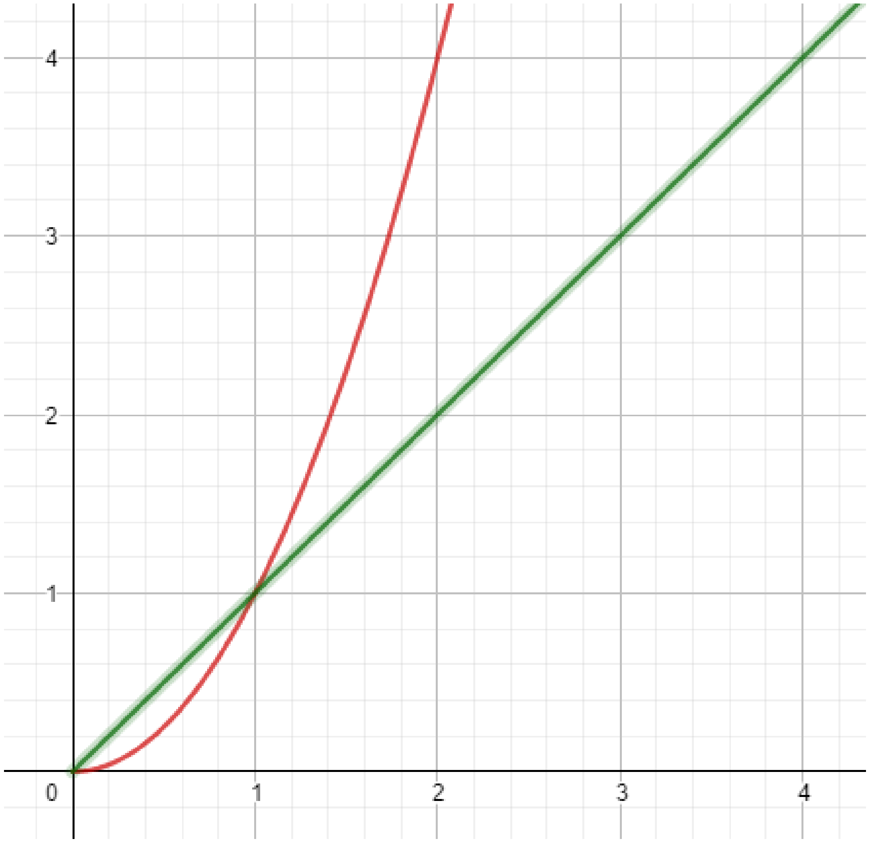
Idée 2 : Soit x un réel quelconque. Comparer les deux réels x^2 et $4(x-1)$.

Idée 3 : On remarque que 0^2=0 et 1^2=1. Quelle(s) conséquence(s) cette observation a-t-elle sur les courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$?

Idée 4 : Comparer un nombre et son double.

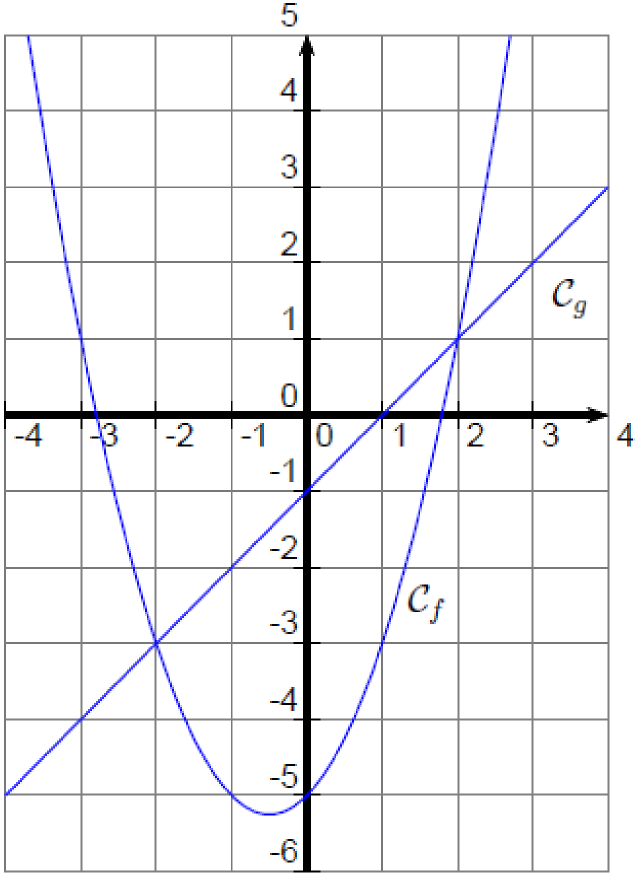
Que démontrer ?

Idée 5 : Quelle conjecture peut-on énoncer à partir de cette figure ?



Que démontrer ?

Idée 6 : Etudier graphiquement les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f et g.



Que démontrer ?

Approfondissements possibles :

- Que dire sur si $x \leq 0$?

- À partir du schéma de démonstration précédent, étudier les positions relatives des courbes d'équation $y = x$ et $y = x^3$ pour $x \geq 0$.

- Etudier les positions relatives des courbes représentatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{x}$

- Etc

Extrait des programmes de seconde

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Temps 5 :
Comment intégrer les repères historiques dans les enseignements ?

académie Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Repères historiques

Atelier :

- Quel type de tâches propose-t-on aux élèves pour intégrer les repères historiques au cours de mathématiques ? Quels supports utiliser?

- Proposer plusieurs méthodes historiques pour trouver un encadrement (ou une approximation) du nombre Pi.

Repères historiques

Approximation de Pi :

- La méthode d'Archimède

https://melusine.eu.org/syracuse/bc/archimede/doc-a4.pdf

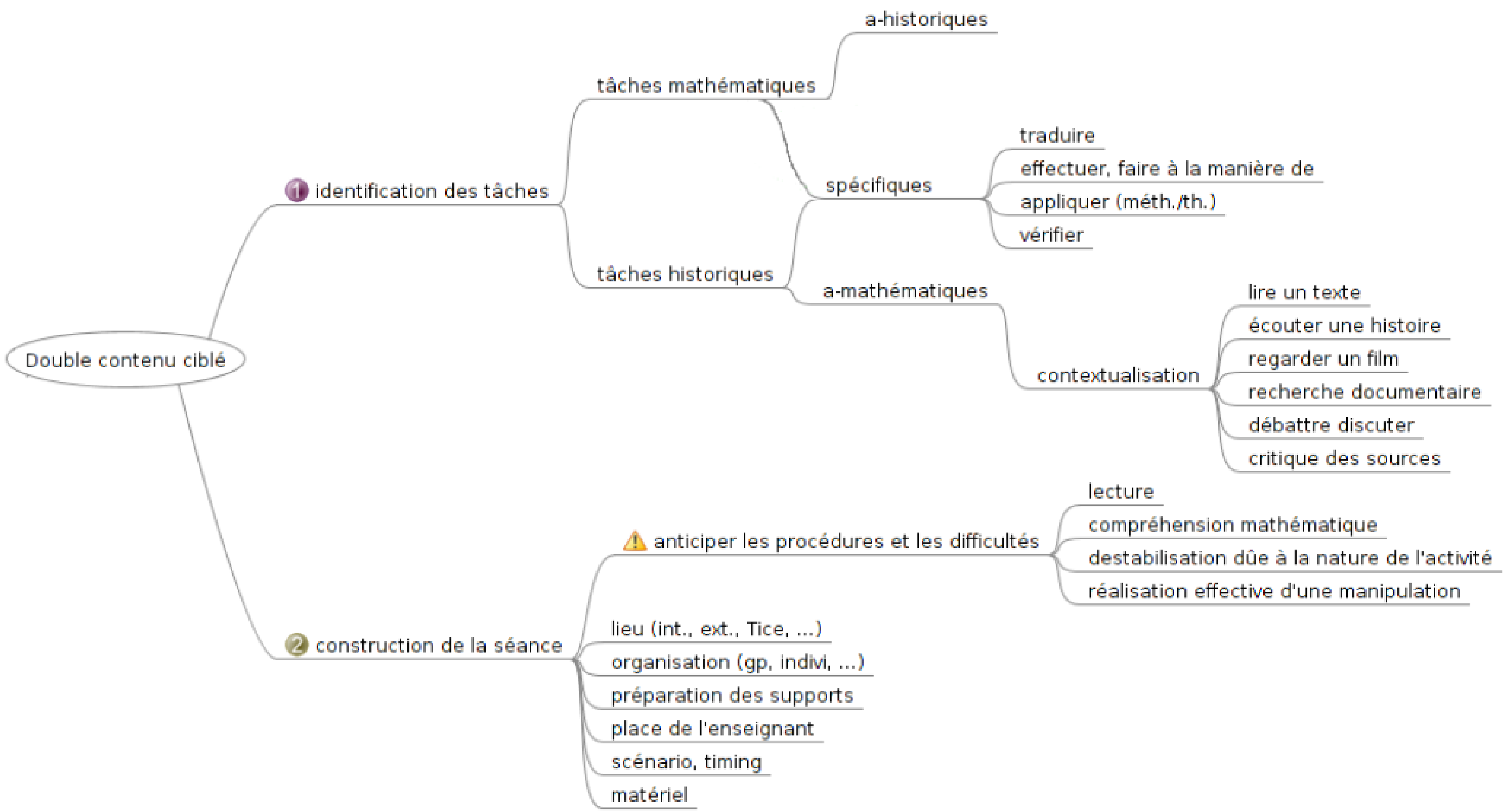
- La méthode de Monte-Carlo

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/monte_carlo.htm

- La méthode de Ramanujan

http://www.pi314.net/fr/ramanujan.php

Repères historiques



Repères historiques

- Frise historique (qui peut être affichée dans la classe)

http://mathiculture.fr/

- Texte historique

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01781209/document

- Vidéos

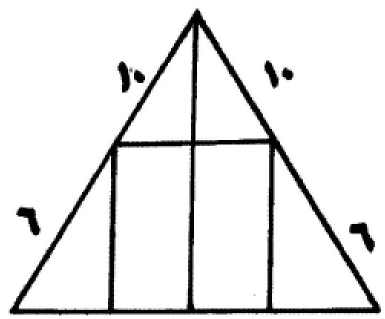
Exemple :***The Story of Maths*** est une télésérie documentaire britannique qui survole différents aspects de l'histoire des mathématiques. Coproduction de l'*Open University* et de la BBC, elle a été diffusée en octobre 2008 sur *BBC Four*. Le scénario a été rédigé et narré par Marcus du Sautoy, professeur à l'université d'Oxford[1]. Les consultants étaient Robin Wilson, Jeremy Gray et June Barrow-Green, universitaires de l'*Open University*.

- Exposés d'élèves

Repères historiques

Dans un traité du IXe siècle, on trouve le problème suivant : « Dans un triangle isocèle de côté 6, on trace un terrain carré ? Quel est son côté ? ».

نصف شيء فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثين جميعاً اللتين
هما على جنبتي المربعة . فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شيء
وهو العمود في نصف شيء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير
المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو
عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو
تكسير المثلثة العظمى فالشيء الواحد من
ذلك أربعة أذرع واربعة أخماس ذراع
وهو كل جانب من المربعة وهذه
صورتها .



1. L'auteur du traité, Al-Khwàrizmí, nous dit : « Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une *chose* et nous la multiplions par elle-même ; il vient un *bien*. [...] ». Que représente une *chose* sur la figure ? Et un *bien* ?

2. Al-Khwàrizmí nous donne ensuite le calcul suivant : « Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs [...] leur aire est que tu multiplies une *chose* par six moins un demi d'une *chose*, il vient six *choses* moins la moitié d'un *bien*. » Expliquer ce calcul.

3. Avec nos notations actuelles, si on note ℓ une *chose*, comment s'écrit un *bien* ? Écrire le calcul précédent avec ces notations.

EXPOSÉ Qui était Al-Khwàrizmí ? Pourquoi son nom est-il important en mathématiques ?

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

académie
Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE