CONCOURS DE MATHEMATIQUES FRANCO-CHINOIS 2019

中法中学生数学交流活动

« COMPTER AVEC L'AUTRE » 《和他/她一起算》

Les calculatrices sont interdites. **Durée :** 120 **minutes**

L'énoncé ci-dessous comporte quatre problèmes indépendants. Chaque problème est constitué de quatre questions à choix multiples, ainsi que de deux ou trois questions à rédiger.

À l'exception de la question 1, qui est notée sur 1 point, chaque question à choix multiples est notée sur 2 points. Pour chaque question à choix multiples, cinq réponses potentielles sont proposées :

– une réponse est correcte : la choisir rapporte 2 points (1 point pour la question 1) ;
– une réponse est incorrecte, et il est possible de détecter facilement qu'elle est incorrecte : la choisir fait perdre 2 points (1 point pour la question 1) ;
– les trois autres réponses sont incorrectes, mais il n'est pas nécessairement facile de détecter qu'elles le sont : choisir une de ces réponses ne rapporte ni ne fait perdre aucun point ;
– ne choisir aucune réponse ou bien choisir deux réponses ou plus ne rapporte ni ne fait perdre aucun point.

Par exemple, dans la question 0 ci-dessous, choisir la réponse B rapporte 2 points et choisir la réponse D fait perdre 2 points. Choisir les réponses A, C ou E ne rapporte ni ne fait perdre aucun point.

Enfin, toutes les réponses aux questions à choix multiples devront **absolument** être indiquées sur la formulaire de réponse : nous ne récupérerons pas les pages de l'énoncé.

Question 0.

Quelle est, approximativement, la superficie de la République Populaire de Chine ?

A. 4 400 000 km^2 B. 9 600 000 km^2 C. 7 300 000 km^2 D. 34 m^2 E. 13 700 000 km^2

Pour chaque question à rédiger, vous devez non seulement indiquer le résultat de la question, mais également démontrer que ce résultat est correct. Votre note dépendra notamment de la clarté et de la précision de votre rédaction.

Le nombre de points que peut rapporter chaque question est indiqué clairement à côté de l'énoncé de la question. Contrairement aux questions à choix multiples, une réponse incorrecte à une question à rédiger ne peut pas vous faire perdre de points.

Les solutions à chacun des problèmes doivent être rédigées sur quatre feuilles séparées ; si, pour un problème, vous répondez à plusieurs questions à rédiger, ces réponses peuvent figurer sur la même feuille.

N'oubliez pas d'indiquer, sur chacune de ces feuilles, le numéro du problème et de la question auxquels vous répondez, ainsi que votre numéro d'étudiant.

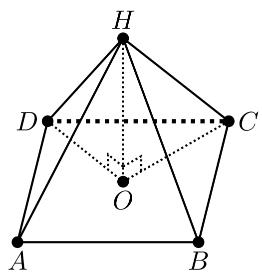
Bonne chance !

Problème 1 : Jeux olympiques et pyramides

Dans ce problème, nous étudierons des *pyramides équilatérales à base carrée*. Une pyramide équilatérale à base carrée est une pyramide $ABCDH$ dont la base est un carré $ABCD$, dont le sommet est le point H, et dont chacune des quatre faces latérales est un triangle équilatéral.

On notera également O le pied de la hauteur issue de H, c'est-à-dire le point de la face $ABCD$ tel que la droite (OH) soit perpendiculaire à la face $ABCD$.

Par exemple, voici un dessin d'une telle pyramide.



Questions à choix multiples

Question 1.

Qui est l'architecte qui a construit la pyramide du Louvre ?

A. Cléopâtre B. Gustave Eiffel C. Kylian Mbappé D. Yao Ming E. Ieoh Ming Pei

---

Question 2.

Catwoman participe à l'épreuve de sprint des jeux olympiques super-héroïques.

En quart de finale, elle doit courir du point U, de coordonnées $(0, 1)$, en un point de la ligne ℓ, d'équation $y = 0$, puis arriver au point V, de coordonnées $(3, 2)$. Elle souhaite minimiser la longueur du chemin qu'elle devra parcourir.

Soit W le point en lequel elle devra toucher la ligne ℓ. Quelle est l'abscisse du point W ?

A. -1 B. 1 C. 1,5 D. 2 E. 3

Question 3.

En demi-finale, Catwoman doit courir sur les faces latérales d'une pyramide équilatérale à base carrée $ABCDH$, de côté $AB = 1$. Elle doit aller du point A au point C en passant par l'arête $[BH]$. L'arbitre Antoine vérifiera qu'elle passe bien par un point du segment $[BH]$.

Ses super-pouvoirs félins permettent à Catwoman de ne pas être ralentie par la pente de la pyramide, et elle souhaite donc minimiser la longueur du chemin à parcourir. Soit M le point en lequel elle devra toucher l'arête $[BH]$. Quel est le point M ?

A. M peut être n'importe où sur $[BH]$ B. $M = B$ C. M est le milieu de $[BH]$

D. $M = D$ E. $M = H$

Question 4.

En finale, Catwoman doit courir sur la même pyramide. Cette fois-ci, elle doit aller du point A au point D en passant par les arêtes $[BH]$ et $[CH]$. Antoine vérifie qu'elle passe bien par un point de chacun de ces segments.

Elle veut de nouveau minimiser la longueur du chemin à parcourir. Quelle est cette longueur minimale ?

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3} + 1/2$ D. 3 E. 5

Questions à rédiger

Question 5 (5 points)**.**

Soit $ABCDH$ une pyramide équilatérale à base carrée, de base $ABCD$ et de sommet H. On rappelle que O est le pied de la hauteur issue de H dans la pyramide $ABCDH$.

Démontrer que O est le milieu du carré $ABCD$.

Question 6 (4 points)**.**

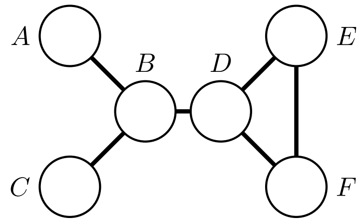
La pyramide du Louvre possède une base carrée et des faces latérales triangulaires. La longueur de chaque côté du carré est de 35 m, et la hauteur de la pyramide est de 21 m.

La pyramide du Louvre est-elle une pyramide équilatérale à base carrée ?

Problème 2 : Moyennes, cercles et voisins

Sur une feuille de papier, Clara et Pierre ont dessiné la figure représentée ci-dessous. Cette figure est formée de six cercles, appelés A, B, C, D, E et F, et de traits qui relient certains des cercles.

On dit que deux cercles sont *voisins* s'ils sont reliés par un trait. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les cercles A et B sont voisins, mais les cercles C et E ne sont pas voisins.



Chaque soir, Clara et Pierre jouent au jeu suivant :

(a) Pierre colorie certains cercles en gris (au moins 1 et pas plus de 5) ; les autres cercles restent blancs.

(b) Ensuite, Clara écrit un entier dans chaque cercle gris.

(c) Ensuite, Pierre écrit un entier dans chaque cercle blanc.

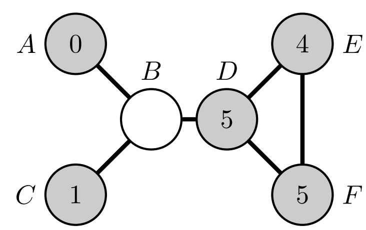
(d) Enfin, Pierre gagne si, une fois tous ces entiers écrits, chaque nombre écrit sur un cercle blanc est égal à la moyenne des nombres écrits dans les cercles qui lui sont voisins.

Questions à choix multiples

Question 7.

Voici la figure obtenue lundi après les étapes (a) et (b).

Quel entier Pierre doit-il écrire dans le cercle B afin de gagner ?



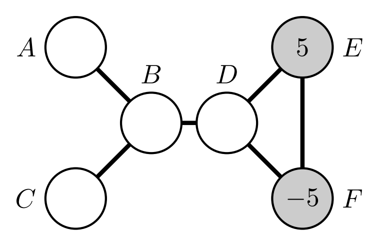
A. -2 B. 1 C. 2 D. 3

E. Ça n'a pas d'importance, car Pierre ne peut pas gagner.

Question 8.

Voici la figure obtenue mardi après les étapes (a) et (b).

Quel entier Pierre doit-il écrire dans le cercle B afin de gagner ?



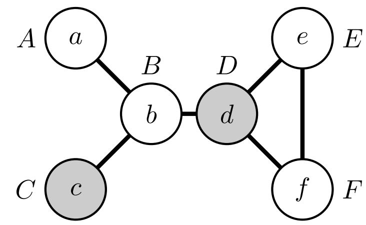
A. -5 B. 0 C. 5

D. Ça n'a pas d'importance, car Pierre ne peut pas gagner.

E. Ça n'a pas d'importance, car Pierre est sûr de gagner.

Question 9.

Mercredi, durant l'étape (a), Pierre a colorié les cercles C et D en gris, mais pas les cercles A, B, E et F. Puis, après l'étape (d), il s'avère que Pierre a gagné.



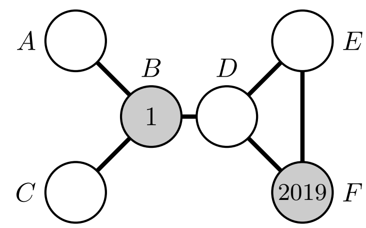
Soit a l'entier écrit dans le cercle A, b l'entier écrit dans le cercle B, etc, comme illustré ci-contre.

Parmi les affirmations ci-dessous, une seule est fausse. Laquelle ?

A. $a = b$ B. $a > b$ C. $2b = c + d$ D. $d = e$ E. $e = f$

Question 10.

Voici la figure obtenue jeudi après les étapes (a) et (b).



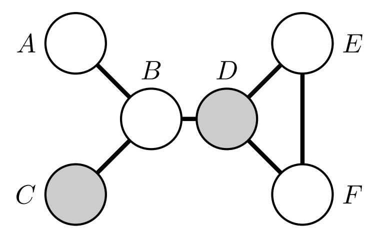
Quel nombre Pierre doit-il écrire dans le cercle D afin de gagner ?

A. 1 B. 1010 C. $1615,4$ D. 2019

E. Ça n'a pas d'importance, car Pierre ne peut pas gagner.

Questions à rédiger

Question 11 (6 points)**.**



Voici la figure obtenue vendredi après l'étape (a).

Isabelle dit alors à Clara d'écrire un entier pair et un entier impair.

Démontrer que, si Clara suit ce conseil, elle est sûre de gagner.

Question 12 (10 points)**.**

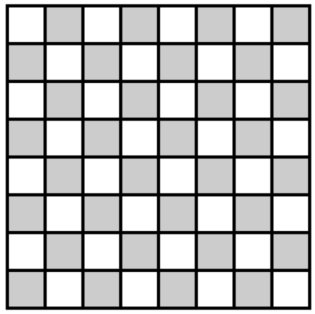
Samedi, avant même que la partie ne commence, Isabelle dit à Pierre que, quels que soit les cercles qu'il aura coloriés en gris durant l'étape (a) et quels que soit les entiers qu'aura écrits Clara durant l'étape (b), il ne doit surtout pas écrire, durant l'étape (c), de nombre strictement plus grand que tous les nombres écrits par Clara durant l'étape (b).

Démontrer que, si Pierre ne suit pas ce conseil, il est sûr de perdre.

Problème 3 : Des chocolats servis sur un plateau

À Noël, Morgane a reçu un échiquier, c'est-à-dire un plateau de jeu carré à 8×8 cases, comme illustré ci-dessous. Elle adore manger du chocolat et jouer avec son échiquier.

Chaque jour, elle essaie de positionner des chocolats sur son échiquier, en mettant au plus un chocolat par case, de manière à satisfaire certaines règles qui changent tous les jours.

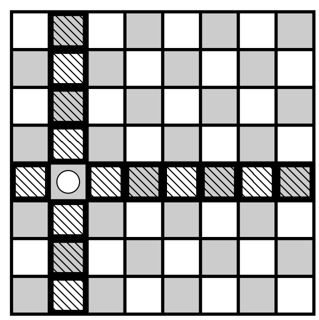


Questions à choix multiples

Question 13.

Lundi, Morgane décide de poser au plus un chocolat dans chaque ligne et chaque colonne.

Par exemple, si elle place un chocolat dans la case située en $2^{\text{ème}}$ colonne (en partant de la gauche) et en $5^{\text{ème}}$ ligne (en partant du haut), alors elle ne peut plus poser d'autres chocolats sur cette colonne et sur cette ligne, comme illustré ci-contre (le cercle blanc représente le chocolat de Morgane, et les cases hachurées sont les cases où Morgane n'a plus le droit de poser de chocolat).

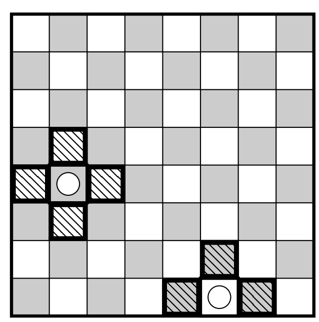


Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

A. 7 B. 8 C. 9 D. 16 E. 17

Question 14.

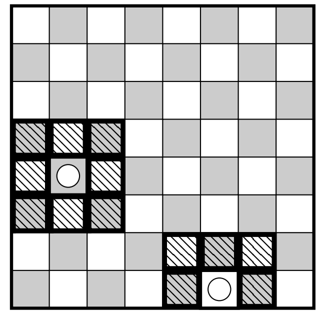
Mardi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui partagent une arête, comme illustré ci-contre (en utilisant les mêmes conventions qu'à la question 13).



Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

A. 16 B. 24 C. 32 D. 42 E. 64

Question 15.

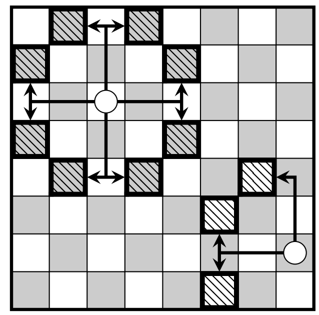


Mercredi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui partagent une arête ou un coin, comme illustré ci-contre.

Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

A. 4 B. 9 C. 12 D. 14 E. 16

Question 16.



Jeudi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui sont à un saut de cavalier l'une de l'autre, comme illustré ci-contre.

Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

A. 7 B. 20 C. 32 D. 33 E. 34

Questions à rédiger

Vendredi, Vincent rend visite à son amie Morgane. Pour lui faire plaisir, il s'apprête à lui offir une boîte de 100 chocolats. Mais, afin de rendre ce cadeau plus intéressant, il lui propose de jouer au jeu suivant :

(a) Morgane peut prendre des chocolats de la boîte et les placer sur l'échiquier, en suivant les contraintes de mercredi ; autrement dit, elle ne peut pas poser de chocolats dans deux cases ayant un côté ou un coin en commun.

(b) Si Vincent parvient à trouver une case de l'échiquier qui n'ait ni côté ni coin commun avec les cases où Morgane a placé ses chocolats, alors il reprendra tous les chocolats.

(c) Sinon, il mange les chocolats que Morgane a utilisés, et Morgane gagne ceux qui sont restés dans la boîte.

Question 17 (4 points)**.**

Démontrer que Morgane peut gagner 91 chocolats.

Question 18 (8 points)**.**

Démontrer que Morgane ne peut pas gagner 93 chocolats.

Question 19 (12 points)**.**

Démontrer que Morgane ne peut pas gagner 92 chocolats.

Problème 4 : Produits maximaux

Chaque matin, avant de partir pour l'école, Adrien, Christophe et Martine jouent au jeu suivant :

(a) Martine choisit un entier $m \geqslant 2$.
(b) Adrien choisit deux entiers a et b tels que $a + b = m$.
(c) Christophe choisit deux entiers c et d tels que $c + d = m$.
(d) Adrien gagne si $ab \geqslant cd$, et il perd si $ab < cd$.

Questions à choix multiples

Question 20.

Lundi, Martine choisit $m = 8$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

A. 4 et 4 B. 5 et 3 C. 6 et 2 D. 7 et 1 E. 8 et 0

Question 21.

Mardi, Martine choisit $m = 200$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

A. 100 et 100 B. 101 et 99 C. 102 et 98 D. 170 et 30 E. 170 et 40

Question 22.

Mercredi, Martine choisit $m = 11$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

A. 5,5 et 5,5 B. 6 et 5 C. 7 et 4 D. 8 et 3 E. 10 et 1

Question 23.

Jeudi, Martine choisit $m = 10$ et, afin de rendre le jeu plus difficile, elle ajoute une nouvelle règle : le PGCD des entiers a et b soit être égal à 1, et le PGCD des entiers c et d doit aussi être égal à 1

Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

A. 5 et 5 B. 6 et 4 C. 7 et 3 D. 8 et 2 E. 9 et 1

Questions à rédiger

Question 24 (8 points)**.**

Vendredi, Martine souhaite revenir au jeu original, et elle demande seulement que $a + b = c + d = m$.

En fonction de la valeur de m, quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Question 25 (12 points)**.**

Samedi, Martine réintroduit la règle ajoutée jeudi : elle demande donc de nouveau que $a + b = c + d = m$ et que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(c, d) = 1$.

En fonction de la valeur de m, quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?