



Une aire variable

Dans les programmes

Aire d'une figure élémentaire. Fonctions par morceaux. Équations de droites. Simulation. Conjecturer une formule (Pick).

1 Coupe d'un rectangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le rectangle $OACB$ de sommets $O, A(17;0), B(0;11), C(17;11)$.

On note Δ_m une droite passant par B et de coefficient directeur m (où m est un réel quelconque).

On note R le point d'intersection de Δ_m avec l'axe des abscisses (pour $m \neq 0$).

On note enfin D le point défini comme suit :

- lorsque $m \geq 0$: $D = C$.
- lorsque $m < 0$: D est le deuxième point d'intersection de Δ_m avec l'un des bords du rectangle $OACB$.

1. Déterminer les coordonnées du point R .
2. Écrire l'algorithme suivant pour une machine (algorithme, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	les coordonnées du point D et affichage du point dans un repère

3. On note \mathcal{P} le polygone se trouvant sous la droite Δ_m et délimité par les côtés du rectangle $OACB$. Écrire les algorithmes suivants pour une machine (algorithme, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	un dessin du polygone \mathcal{P}

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	l'aire du polygone \mathcal{P}

2 Tirages au hasard

Écrire l'algorithme suivant sur machine :

Entrées : un réel m , un entier $n > 0$

début

répéter n fois

 Tirer au hasard dans $[0; 17]$ un réel x

 Tirer au hasard dans $[0; 11]$ un réel y

 Tester si le point $M(x; y)$ est à l'intérieur de \mathcal{P}

 Afficher éventuellement le point avec des couleurs différentes suivant qu'il est ou qu'il n'est pas dans le polygone \mathcal{P}

fin

Sortie : Affichage du produit $17 \times 11 \times \frac{\text{Nombre de points } M \text{ dans } \mathcal{P}}{n}$



Quel constat fait-on pour de grandes valeurs de n ?

3 Des points à coordonnées entières

1. Quelles sont les valeurs de m telles que le point D soit à coordonnées entières ?
2. Écrire sur machine l'algorithme suivant :

Entrées : un réel m tel que D soit à coordonnées entières

début

Compter le nombre n_i de points à coordonnées entières qui sont à l'intérieur strictement du polygone \mathcal{P}

Compter le nombre n_b de points à coordonnées entières qui se trouvent sur un côté du polygone \mathcal{P}

fin

Sortie : Affichage de n_i et n_b

Après observation de résultats, vous chercherez à émettre une conjecture sur une formule liant l'aire de \mathcal{P} et les valeurs de n_i et n_b .



Éléments de réponses – ALGOBOX

1 Coupe d'un rectangle

Les coordonnées du point $R : \left(-\frac{11}{m}; 0\right)$.

Calcul des coordonnées du point D :

```
1  VARIABLES
2    m EST_DU_TYPE NOMBRE
3    xD EST_DU_TYPE NOMBRE
4    yD EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6    TRACER_SEGMENT (0,0)->(17,0)
7    TRACER_SEGMENT (17,0)->(17,11)
8    TRACER_SEGMENT (17,11)->(0,11)
9    TRACER_SEGMENT (0,11)->(0,0)
10   LIRE m
11   SI (m>=0) ALORS
12     DEBUT_SI
13       xD PREND_LA_VALEUR 17
14       yD PREND_LA_VALEUR 11
15     FIN_SI
16   SINON
17     DEBUT_SINON
18       SI (-11/m<=17) ALORS
19         DEBUT_SI
20           xD PREND_LA_VALEUR -11/m
21           yD PREND_LA_VALEUR 0
22         FIN_SI
23       SINON
24         DEBUT_SINON
25           xD PREND_LA_VALEUR 17
26           yD PREND_LA_VALEUR 17*m+11
27         FIN_SINON
28     FIN_SINON
29   TRACER_POINT (xD,yD)
30   AFFICHER "Le couple des coordonnées de D est : ("
31   AFFICHER xD
32   AFFICHER "; "
33   AFFICHER yD
34   AFFICHER ")"
35  FIN_ALGORITHME
```

Représentation du polygone \mathcal{P} :



```
1  VARIABLES
2    m EST_DU_TYPE NOMBRE
3    xD EST_DU_TYPE NOMBRE
4    yD EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6    LIRE m
7    TRACER_SEGMENT (0,0)->(0,11)
8    SI (m>=0) ALORS
9      DEBUT_SI
10     xD PREND_LA_VALEUR 17
11     yD PREND_LA_VALEUR 11
12     TRACER_SEGMENT (0,0)->(17,0)
13     TRACER_SEGMENT (17,0)->(17,11)
14     FIN_SI
15     SINON
16       DEBUT_SINON
17       SI (-11/m<=17) ALORS
18         DEBUT_SI
19         xD PREND_LA_VALEUR -11/m
20         yD PREND_LA_VALEUR 0
21         TRACER_SEGMENT (0,0)->(xD,yD)
22         FIN_SI
23         SINON
24           DEBUT_SINON
25           xD PREND_LA_VALEUR 17
26           yD PREND_LA_VALEUR 17*m+11
27           TRACER_SEGMENT (0,0)->(17,0)
28           TRACER_SEGMENT (17,0)->(xD,yD)
29           FIN_SINON
30       FIN_SINON
31     TRACER_SEGMENT (0,11)->(xD,yD)
32  FIN_ALGORITHME
```

Le calcul de l'aire du polygone \mathcal{P} :

$$\mathcal{A}(m) = \begin{cases} 17 \times 11 & \text{pour } m \in [0, +\infty[\\ \frac{17}{2} \times (22 + 17m) & \text{pour } m \in]\frac{-11}{17}, 0[\\ \frac{-11^2}{2m} & \text{pour } m \in]-\infty; \frac{-11}{17}] \end{cases}$$

ou encore :

$$\mathcal{A}(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \times (11 + y_D) \times 17 & \text{pour } m \in [\frac{-11}{17}, +\infty[\\ \frac{1}{2} \times 11 \times x_D & \text{pour } m \in]-\infty; \frac{-11}{17}] \end{cases}$$



```
1  VARIABLES
2    m EST_DU_TYPE NOMBRE
3    xD EST_DU_TYPE NOMBRE
4    yD EST_DU_TYPE NOMBRE
5    aire EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7    LIRE m
8    SI (m>=0) ALORS
9      DEBUT_SI
10     aire PREND_LA_VALEUR 17*11
11     FIN_SI
12     SINON
13       DEBUT_SINON
14       SI (-11/m<=17) ALORS
15         DEBUT_SI
16         xD PREND_LA_VALEUR -11/m
17         aire PREND_LA_VALEUR 1/2*xD*11
18         FIN_SI
19         SINON
20           DEBUT_SINON
21           yD PREND_LA_VALEUR 17*m+11
22           aire PREND_LA_VALEUR 1/2*(11+yD)*17
23           FIN_SINON
24       FIN_SINON
25     AFFICHER aire
26  FIN_ALGORITHME
```

2 Tirages au hasard

Algorithme de tirages au hasard :

```
1  VARIABLES
2    n EST_DU_TYPE NOMBRE
3    x EST_DU_TYPE NOMBRE
4    y EST_DU_TYPE NOMBRE
5    compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
6    k EST_DU_TYPE NOMBRE
7    rapport EST_DU_TYPE NOMBRE
8    m EST_DU_TYPE NOMBRE
9  DEBUT_ALGORITHME
10  compteur PREND_LA_VALEUR 0
11  AFFICHER "Entrez le coefficient directeur de la droite Delta_m."
12  LIRE m
```



```
13 AFFICHER "Entrez le nombre de points tirés au hasard. "  
14 LIRE n  
15 POUR k ALLANT_DE 1 A n  
16   DEBUT_POUR  
17     x PREND_LA_VALEUR 17*random()  
18     y PREND_LA_VALEUR 11*random()  
19     SI (y<=m*x+11) ALORS  
20       DEBUT_SI  
21         compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1  
22       FIN_SI  
23     FIN_POUR  
24   rapport PREND_LA_VALEUR 17*11*compteur/n  
25   AFFICHER rapport  
26 FIN_ALGORITHME
```

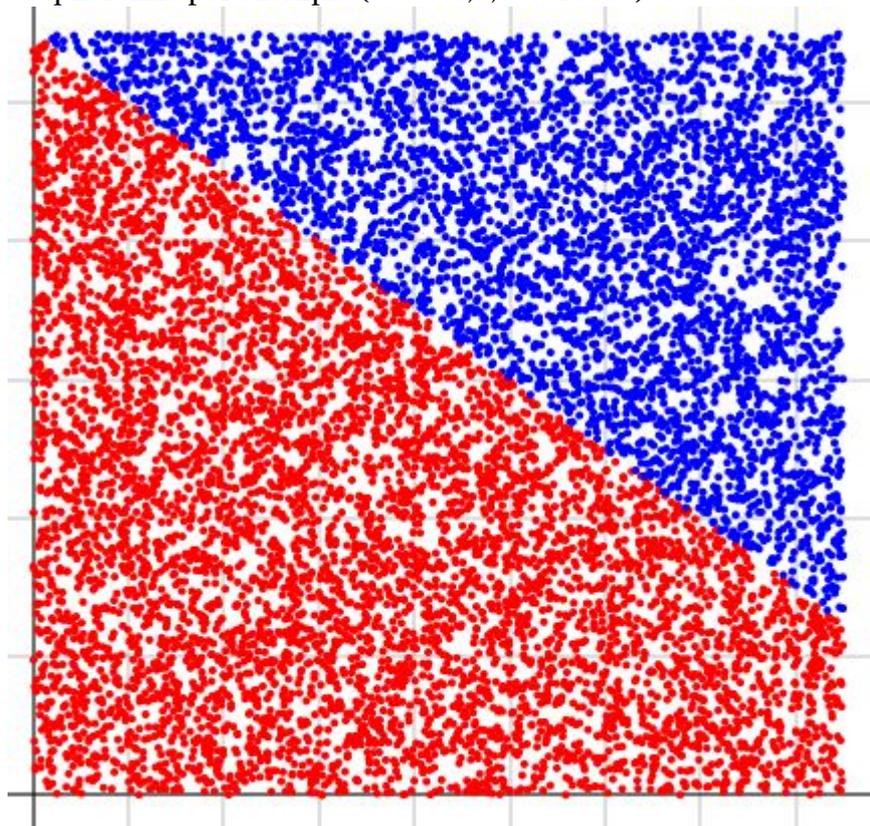
En prenant n "assez grand", les valeurs obtenues sont très proches de l'aire de \mathcal{P} .

On peut aussi écrire une version avec affichage des points (les deux affichages sont de couleurs différentes suivant que le point est en-dessous ou au-dessus de la droite Δ_m) :

```
1  VARIABLES  
2    n EST_DU_TYPE NOMBRE  
3    x EST_DU_TYPE NOMBRE  
4    y EST_DU_TYPE NOMBRE  
5    compteur EST_DU_TYPE NOMBRE  
6    k EST_DU_TYPE NOMBRE  
7    rapport EST_DU_TYPE NOMBRE  
8    m EST_DU_TYPE NOMBRE  
9  DEBUT_ALGORITHME  
10   compteur PREND_LA_VALEUR 0  
11   AFFICHER "Entrez le coefficient directeur de la droite Delta_m."  
12   LIRE m  
13   AFFICHER "Entrez le nombre de points tirés au hasard. "  
14   LIRE n  
15   POUR k ALLANT_DE 1 A n  
16     DEBUT_POUR  
17       x PREND_LA_VALEUR 17*random()  
18       y PREND_LA_VALEUR 11*random()  
19       SI (y<=m*x+11) ALORS  
20         DEBUT_SI  
21           compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1  
22           TRACER_POINT (x,y)  
23         FIN_SI  
24       SINON  
25         DEBUT_SINON  
26           TRACER_POINT (x,y)
```

```
27     FIN_SINON
28     FIN_POUR
29     rapport PREND_LA_VALEUR 17*11*compteur/n
30     AFFICHER rapport
31     FIN_ALGORITHME
```

ce qui donne par exemple ($m = -0,5$, $n = 10000$) :



3 Des points à coordonnées entières

1. CAS 1- Le point D est un point du segment $[OA]$.

Le point D a dans ce cas pour coordonnées $(\frac{-11}{m}, 0)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $\frac{-11}{m} = j$ avec $j \in \{1; 2; \dots; 17\}$. Les valeurs possibles de m sont donc les valeurs de l'ensemble $\{\frac{-11}{1}; \frac{-11}{2}; \dots; \frac{-11}{17}\}$.

- CAS 2- Le point D est un point du segment $[AB]$.

Le point D a dans ce cas pour coordonnées $(17; 17m + 11)$. Dans ce cas, le point D est à coordonnées entières ssi $17m + 11 = k$ où $k \in \{0; 1; 2; \dots; 11\}$ (le cas $k = 0$ correspond au cas $D = A$ déjà comptabilisé dans la situation précédente, le cas $k = 11$ correspond au cas $m = 0$).



Les valeurs de m donnant un point D à coordonnées entières sont donc les valeurs de l'ensemble :

$$\left\{ \frac{-11}{1}; \frac{-11}{2}; \dots; \frac{-11}{17}; \frac{1-11}{17}; \frac{2-11}{17}; \dots; \frac{11-11}{17} \right\}$$

2. La conjecture attendue est la formule de Pick :

$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = n_i + \frac{1}{2} n_b - 1$$

La proposition suivante sur algobox ne fonctionne pas sur la version 0.4 (bug sur les tests) :

```
1  VARIABLES
2  ni EST_DU_TYPE NOMBRE
3  nb EST_DU_TYPE NOMBRE
4  t EST_DU_TYPE NOMBRE
5  m EST_DU_TYPE NOMBRE
6  k EST_DU_TYPE NOMBRE
7  x EST_DU_TYPE NOMBRE
8  y EST_DU_TYPE NOMBRE
9  aire EST_DU_TYPE NOMBRE
10 DEBUT_ALGORITHME
11  LIRE m
12  ni PREND_LA_VALEUR 0
13  nb PREND_LA_VALEUR 0
14  t PREND_LA_VALEUR 0
15  POUR k ALLANT_DE 1 A 17
16    DEBUT_POUR
17    SI (m== -11/k) ALORS
18      DEBUT_SI
19        t PREND_LA_VALEUR 1
20      FIN_SI
21    FIN_POUR
22  SI (t==0) ALORS
23    DEBUT_SI
24    POUR k ALLANT_DE 1 A 11
25      DEBUT_POUR
26      SI (m==(k-11)/17) ALORS
27        DEBUT_SI
28          t PREND_LA_VALEUR 1
29        FIN_SI
30      FIN_POUR
31    FIN_SI
32  SI (t==0) ALORS
33    DEBUT_SI
34    AFFICHER "valeur de m non valide"
35    FIN_SI
36  SI (t==1) ALORS
```



```
37   DEBUT_SI
38   POUR x ALLANT_DE 1 A 17-1
39     DEBUT_POUR
40     POUR y ALLANT_DE 1 A 11-1
41       DEBUT_POUR
42       SI (y<m*x+11) ALORS
43         DEBUT_SI
44         ni PREND_LA_VALEUR ni+1
45         TRACER_POINT (x,y)
46         FIN_SI
47       FIN_POUR
48     FIN_POUR
49   POUR x ALLANT_DE 0 A 17
50     DEBUT_POUR
51     SI (m*x+11>=0) ALORS
52       DEBUT_SI
53       nb PREND_LA_VALEUR nb+1
54       FIN_SI
55     FIN_POUR
56   POUR x ALLANT_DE 0 A 17
57     DEBUT_POUR
58     SI (11<=m*x+11) ALORS
59       DEBUT_SI
60       nb PREND_LA_VALEUR nb+1
61       FIN_SI
62     FIN_POUR
63   POUR y ALLANT_DE 1 A 11-1
64     DEBUT_POUR
65     SI (y<=m*0+11) ALORS
66       DEBUT_SI
67       nb PREND_LA_VALEUR nb+1
68       FIN_SI
69     FIN_POUR
70   POUR y ALLANT_DE 1 A 11-1
71     DEBUT_POUR
72     SI (y<=17*m+11) ALORS
73       DEBUT_SI
74       nb PREND_LA_VALEUR nb+1
75       FIN_SI
76     FIN_POUR
77   POUR x ALLANT_DE 1 A 17-1
78     DEBUT_POUR
79     y PREND_LA_VALEUR m*x+11
80     SI (floor(y)==y et y>0 et y<11) ALORS
81       DEBUT_SI
82       nb PREND_LA_VALEUR nb+1
83     FIN_SI
```



```
84     FIN_POUR
85     AFFICHER ni
86     AFFICHER nb
87     aire PREND_LA_VALEUR ni+1/2*nb-1
88     AFFICHER aire
89     FIN_SI
90  FIN_ALGORITHME
```

La conjecture peut être suivie de la démonstration de la formule de Pick dans quelques cas particuliers : rectangles à côtés parallèles aux axes, triangles rectangles ("moitié" des rectangles précédents) ...