Une aire variable

Dans les programmes

Aire d'une figure élémentaire. Fonctions par morceaux. Équations de droites. Simulation. Conjecturer une formule (Pick).

1 Coupe d'un rectangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On considère le rectangle $OACB$ de sommets O, $A(17;0)$, $B(0;11)$, $C(17;11)$.
On note Δ_m une droite passant par B et de coefficient directeur m (où m est un réel quelconque).
On note R le point d'intersection de Δ_m avec l'axe des abscisses (pour $m \neq 0$).
On note enfin D le point défini comme suit :
- lorsque $m \geqslant 0$: $D = C$.
- lorsque $m < 0$: D est le deuxième point d'intersection de Δ_m avec l'un des bords du rectangle $OACB$.

1. Déterminer les coordonnées du point R.
2. Écrire l'algorithme suivant pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	les coordonnées du point D et affichage du point dans un repère

3. On note $\mathscr{P}$ le polygone se trouvant sous la droite Δ_m et délimité par les côtés du rectangle $OACB$.
Écrire les algorithmes suivants pour une machine (algobox, xcas, calculatrice ...) :

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	un dessin du polygone $\mathscr{P}$

Entrée	un réel m
Traitement	
Sortie	l'aire du polygone $\mathscr{P}$

2 Tirages au hasard

Écrire l'algorithme suivant sur machine :

Entrées : un réel m, un entier $n > 0$
début
  répéter n **fois**
    Tirer au hasard dans $[0;17]$ un réel x
    Tirer au hasard dans $[0;11]$ un réel y
    Tester si le point $M(x;y)$ est à l'intérieur de $\mathscr{P}$
    Afficher éventuellement le point avec des couleurs différentes suivant qu'il est ou qu'il n'est pas dans le polygone $\mathscr{P}$
fin
Sortie : Affichage du produit $17 \times 11 \times \dfrac{\text{Nombre de points } M \text{ dans } \mathscr{P}}{n}$

Quel constat fait-on pour de grandes valeurs de n ?

3 Des points à coordonnées entières

1. Quelles sont les valeurs de m telles que le point D soit à coordonnées entières ?
2. Écrire sur machine l'algorithme suivant :

    Entrées : un réel m tel que D soit à coordonnées entières
    début
    Compter le nombre n_i de points à coordonnées entières qui sont à l'intérieur strictement du polygone $\mathscr{P}$
    Compter le nombre n_b de points à coordonnées entières qui se trouvent sur un côté du polygone $\mathscr{P}$
    fin
    Sortie : Affichage de n_i et n_b

    Après observation de résultats, vous chercherez à émettre une conjecture sur une formule liant l'aire de $\mathscr{P}$ et les valeurs de n_i et n_b.