Parabole et rapport d'aires - Fiche élève

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient A et B deux points de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. On note a et b les abscisses respectives des points A et B (avec $a < b$). On note C le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{P}$ en A et de la tangente à $\mathcal{P}$ en B et on note $\mathcal{T}$ l'aire du triangle ABC. On note $\mathcal{S}$ l'aire délimitée par la droite (AB) et la parabole.

Expérimentation

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire une figure adaptée au problème posé.
   (a) Émettre une conjecture sur l'expression des coordonnées du point C en fonction de a et b.
   (b) Émettre une conjecture sur le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{S}}$.
2. À l'aide du logiciel Xcas, menez les calculs utiles à la confirmation de vos conjectures.

Devoir Maison

1. Retrouvez les résultats obtenus avec Xcas en détaillant les calculs effectués.
2. Déduire des résultats précédents le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{S}}$ défini de façon analogue avec la parabole d'équation $y = x^2 + \beta x + \gamma$ où β et γ sont des réels quelconques.
3. En déduire le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{S}}$ défini de façon analogue avec la parabole d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où α, β et γ sont des réels quelconques, $\alpha \neq 0$.

Quelques instructions du logiciel Xcas

L'aide du logiciel est assez complète et beaucoup d'instructions sont francisées : une recherche par les mots mathématiques usuels est souvent fructueuse. C'est un atout pour l'usage en classe : on peut souvent se dispenser d'énoncer les instructions à utiliser, laissant ainsi une plus grande initiative dans la démarche à suivre.
Pour une première prise en main, un rapide tour d'horizon des possibilités par la donnée de quelques instructions n'est cependant pas inutile.

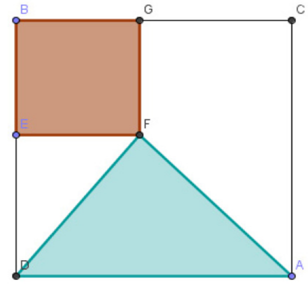
1. Les instructions sur une même ligne sont séparées par des points-virgules ;
2. Xcas ne connaît pas les lettres accentuées ;
3. $A := point(a, a\ \hat{}2)$ permet de définir un point avec ses coordonnées (a est créé en même temps). Sont alors utilisables les instructions $abscisse(A), ordonnee(A), coordonnees(A), \ldots$;
4. Des instructions comme droite(A,B) (pour la tracer), equation(droite(A,B)) pour savoir son équation ;
5. De la même façon, on aura : $T := triangle(A, B, C)$, $aire(T)$;
6. Sont utiles aussi : int(f(x),x,a,b) pour $\int_a^b f(x)dx$ où f aura été définie par $f(x) := \ldots$;
7. $T_A := droite\_tangente(f(x), a)$ (tangente au point d'abscisse a) enchaîné avec equation(T_A) ;
8. Et évidemment : simplifier, factoriser (en français dans le texte)... ;
9. Pour le copier et coller, on peut utiliser ctrl c et ctrl v.

Aires égales - version 1

Fiche d'identité

- **Niveau** : seconde ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle info suivie d'une démonstration papier (en classe ou dm) ;
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer ;
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, permet la conjecture, permet l'approche du problème dans sa situation la plus générale ;
- **Compétences travaillées** :
  - aire, calcul algébrique, extremum de fonction (éventuellement) ;
  - mise en équation d'un problème, résolution d'équation ;
- **Variante possible** : voir exercice suivant.

Énoncé - Fiche élève



On définit un carré $ACBD$. Sur le côté $[BC]$, on place un point F. On construit alors à l'intérieur du carré le carré $BEFG$, le point E étant sur le côté $[BD]$ et le triangle ADF. On note $\mathcal{C}$ l'aire du carré $BEFG$ et $\mathcal{T}$ celle du triangle ADF.
L'objectif est de déterminer la position de F sur le côté $[BC]$ qui permet d'avoir égalité entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel adapté.
2. A l'aide du logiciel, déterminer s'il existe une position du point F répondant au problème posé.
3. L'aire $\mathcal{C}$ peut-elle être double de l'aire $\mathcal{T}$?
4. Démontrer la conjecture faite en 2.

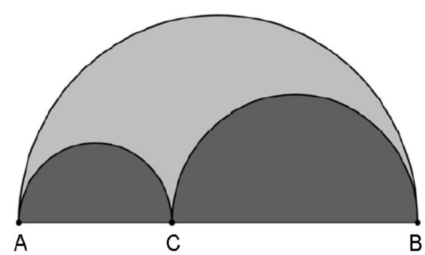
Aires égales - version 2

Fiche d'identité

- **Niveau** : seconde ;
- **Logiciel** : géométrie dynamique ;
- **Type d'utilisation** : TP en salle info suivie d'une démonstration papier (en classe ou dm) ;
- **Objectifs** : conjecturer, démontrer ;
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, permet la conjecture, permet l'approche du problème dans sa situation la plus générale ;
- **Compétences travaillées** :
  - aire de disque, calcul algébrique ;
  - mise en équation d'un problème, résolution d'équation.
- **Variante possible** : remplacer les demi-disques par des triangles isocèles ou équilatéraux, par des carrés pour avoir un problème de degré différent. On peut aussi donner le problème sans aucune valeur numérique pour favoriser le cadre géométrique.

Énoncé - Fiche élève

On note $\mathcal{T}$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 10$ et C un point de ce diamètre $[AB]$. On construit alors à l'intérieur de $\mathcal{C}$ deux demi-cercles de diamètres respectifs AC et CB (voir figure). On pose $AC = x$.



1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel adapté.
2. (a) Déterminer le périmètre de la frontière de la surface colorée en gris clair.
   (b) Que peut-on constater ?
   (c) Démontrer le résultat observé.
3. Déterminer la position du point C pour laquelle l'aire de la surface colorée en gris clair est égale à l'aire de la surface colorée en gris foncé.

Indications (éventuelles) :
– Déterminer, en fonction de x : l'aire A(x) de la surface colorée en gris foncé. l'aire B(x) de la surface colorée en gris clair ;
– Vérifier que $A(x) = \frac{\pi(x^2-10x+50}{4}$ et que $B(x) = \frac{\pi(10x-x^2)}{4}$;
– Factoriser l'expression A(x) - B(x).