**Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)**

***Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d’un entier***

*On rappelle qu’on nombre entier est un multiple d’un nombre entier s’il existe un nombre entier tel que Dans ce cas, on dit aussi que est un diviseur de . Ce vocabulaire ne s’utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d’un entier .*

**1.** Quels sont les diviseurs de ? Quels sont les diviseurs de ? Quels sont les diviseurs de ? Quels sont les diviseurs de ?

**2.** Quelle est la somme des diviseurs de Quelle est la somme des diviseurs de ? Quelle est la somme des diviseurs de ? Quelle est la somme des diviseurs de ?

À tout nombre entier naturel non nul , on associe le nombre et la somme de ses diviseurs.

**3.** Pour chacun des nombres , 2 021 vérifier l’inégalité :

**4.** À tout diviseur d’un entier non nul on associe l’entier tel que . Si les diviseurs de sont , on note respectivement 1 les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

***a.***Évaluer la somme 1

***b.***Si et sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

***c.***En déduire, pour des nombres et tels que , l’inégalité

***d.*** En déduire finalement que l’inégalité est réalisée pour tout entier naturel non nul.

**5. *a.***Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l’égalité (\*)

n’est réalisée que si, pour chacun des diviseurs de l’égalité

est réalisée.

***b.***En déduire que seuls et les nombres premiers peuvent satisfaire l’égalité (\*)

***c.***La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l’enseignement de spécialité de la voie générale)**

**Entiers décomposables**

On donne un entier supérieur ou égal à 1.

On dit qu’un entier naturel est décomposable s’il existe des entiers naturels et tels que :

Par exemple, le nombre est décomposable, puisque , le nombre est décomposable, puisque .

**A. Quelques exemples**

**1. *a.*** Le nombre est-il décomposable ? Est-il décomposable ?

***b.*** Le nombre est-il décomposable ?

**2. *a.*** Justifier qu’il y a exactement deux nombres décomposables.

***b.*** Justifier qu’il y a exactement trois nombres décomposables.

**3.** Soit un entier supérieur ou égal à 1.

***a.*** Le nombre est-il décomposable ?

***b.*** Prouver que est décomposable.

***c.*** Prouver que si , alors 2 n’est pas décomposable.

**B. Une étude des nombres décomposables**

Soit un entier supérieur ou égal à 1.

**1. *a.*** Prouver que si est décomposable, alors

***b***. Quels sont les entiers décomposables ? Quels sont les entiers décomposables ?

**2.** Prouver que si et si est décomposable, alors il existe un unique couple d’entiers vérifiant le système

**3. *a.*** Soit un nombre décomposable. Justifier qu’il existe un entier compris entre et tel que soit solution de l’équation

***b.*** Prouver que, réciproquement, si est un entier naturel et qu’il existe un entier compris entre et tel que soit solution de l’équation alors est décomposable.

***c.*** Soit un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre est décomposable.

**4.** Prouver que si est décomposable, alors est décomposable.

**5.** Dans cette question, on suppose que est pair et que Prouver que n’est pas décomposable.

**6.** Justifier que, pour tout , il y a un nombre pair d’entiers décomposables.

**7.**  Dans cette question, on suppose que est un nombre premier. Déterminer tous les entiers décomposables.

**8.** On donne un entier supérieur ou égal à 2. Prouver qu’il n’existe qu’un nombre fini d’entiers tels que soit décomposable.

**Exercice 3 (candidats ne suivant pas l’enseignement de spécialité de la voie générale)**

***Fractions et pyramides égyptiennes***

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple , , sont des fractions égyptiennes).

**1.** Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

***a.*** La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

***b.*** Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

***c.*** Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

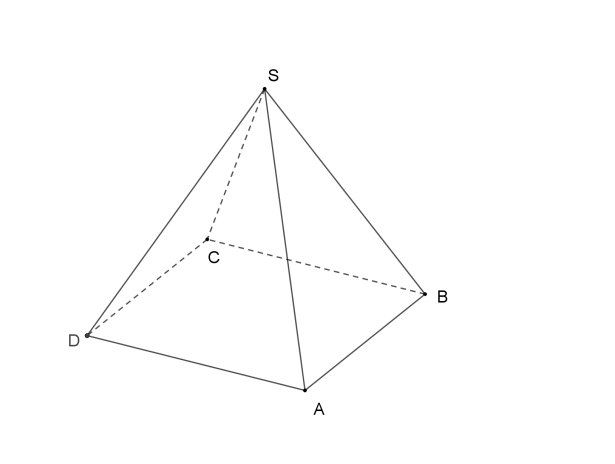
**2.** On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu’on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.

Par exemple,

* a pour décomposition égyptienne .
* est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.

***a.*** Donner deux décompositions égyptiennes de . Que peut-on en déduire sur l’unicité de la décomposition égyptienne d’un nombre rationnel tel que  ?

***b.*** Donner une décomposition égyptienne de puis de .

**3.** On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :

- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;

- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.

***a.*** Montrer que la pyramide régulière à base carrée ci-contre, telle que et , est une pyramide égyptienne

Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière à base carrée de sommet dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs et sont des *fractions égyptiennes*.

Il existe donc deux entiers naturels non nuls et tels que et et on suppose que .

***b.*** Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors et .

***c.*** Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s’il existe un entier naturel non nul tel que

***d.*** En déduire que si  et sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.