Eléments de correction

Olympiades de mathématiques de 4e – session 2023

**Exercice 1 L’esprit de la lettre**

**1. *a.*** Pour le mot ETUDE, en conservant le E initial et le E final, il y a autant de mots possibles que des permutations des lettres T, U et D, soit 6 : TUD, TDU, DUT, DTU, UDT et UTD.

***b.*** Pour le mot HUMAIN, on conserve le H et le N et on compte les permutations des quatre lettres U, M, A et I. Il y en a 24 (de gauche à droite dans l’écriture, on a 4 possibilités pour la première lettre, 3 pour la deuxième, 2 pour la troisième et $4×3×2=24$.

***c.*** Le mot de trois lettres n’offre qu’une possibilité et pour les deux autres, on doit compter les permutations des lettres centrales, 5 lettres pour l’un, quatre pour l’autre. Au total, $5×4×3×2×4×3×2=2 880$ phrases possibles en conservant l’ordre des mots.

**2.** Si $n$ est inférieur ou égal à 3, il n’y a qu’une écriture possible. Si $n\geq 3$, on compte les permutations des $(n-2)$ lettres centrales. Il y en a $\left(n-2\right)\left(n-3\right)…3×2×1$. Ce nombre est appelé la factorielle de $\left(n-2\right),$ est noté $\left(n-2\right)!$, ce qu’on lit « factorielle $(n-2)$ ».

**3.** Chacune des permutations des $(n-2)$ lettres apparaît deux fois, deux lettres identiques étant interchangeables. Le nombre cherché est donc $\left(n-2\right)\left(n-3\right)…4×3. $

****

**Exercice 2 Carrément carré**

**1. a.** La figure ci-dessous montre 24 carrés. Quand on « coupe en 4 » un carré, on ajoute 3 carrés).

******b.** La figure de gauche montre un dallage comportant 6 carrés tandis que celle de droite montre un dallage comportant 7 carrés.

**d.** Comme dit plus haut, « couper un carré en quatre carrés » revient à ajouter 3 carrés. Si on peut réaliser un dallage de $1+3n$ carrés, on peut par ce procédé ajouter 3 carrés et obtenir

$1+3n+3=1+3(n+1)$ carrés et ainsi de proche en proche à partir de 1.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **a.** Dans le cas de la figure 2, le dallage est constitué de 4 petits carrés sur le côté, ce qui donne 12 petits carrés et 1 grand, soit au total 13 carrés.

Si on prend 5 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $5+5+3+3+1=17$ carrés.Pour 6 petits carrés sur chaque côté, on aura au total$6+6+4+4+1=21$ carrés.Pour 7 petits carrés sur chaque côté, on aura au total$7+7+5+5+1=25$ carrés. |  |

**b.** Plus généralement, s’il y a $n$ carrés sur un côté, il y en a $\left(n-1\right)$ sur les côtés adjacents et $(n-2)$ sur le côté opposé : au total $1+n+2×\left(n-1\right)+\left(n-2\right)=4n-3$ carrés (en n’oubliant pas le carré central).

**Exercice 3 Quel est le rayon du cercle ?**

1. Par définition des points D et F, les triangles CFO et CDO sont rectangles respectivement en F et D. Ils ont un côté commun, le segment [CO] et OD = OF. On en déduit qu’ils sont isométriques.

La droite (DO) est la médiatrice du segment [BC] donc les triangles OCB et OBD sont rectangles en D, ont le côté [OD] en commun et DC = DB. On en déduit qu’ils sont isométriques. Donc le triangle ODB est isométrique au triangle OFC.

1. Les angles $\hat{OBD}, \hat{OCF},\hat{OCD}$ ont même mesure, et leur somme est supplémentaire à la mesure de l’angle droit $\hat{BFC}$ (le triangle BFC est rectangle en F). Leur mesure est donc 30°.
2. Le triangle OFC est rectangle en F et ses angles aigus mesurent 30° et 60°.

On appelle O’ le symétrique du point O par rapport à la droite (FC). Le triangle OO’C est donc équilatéral et (FC) est sa hauteur issue de C. Comme, dans un triangle équilatéral, la hauteur est également médiane, on en déduit que F est le milieu du segment [OO’], c’est-à-dire que [OF] mesure la moitié du côté du triangle équilatéral OO’C.

Ainsi, le rayon du cercle est 14.

**Exercice 4 Lecture inversée**

**1.** Le nombre $N'$ ne s’écrit qu’avec 3 chiffres si le chiffre des unités de $N$ est $0. $

**2.** Par exemple 2222.

**3. a.** Supposons qu’il existe $N$ tel que $N’=4N$ et que $N\geq 2500$. On a alors $N'\geq 10000$. Le nombre $N’$ s’écrirait donc avec au moins 5 chiffres, ce qui n’est possible car il est constitué des 4 chiffres de $N$. Ainsi, $N<2500$.

**3. b.** L’égalité $N^{'}=4N$ n’est envisageable que si $N<2 500$, ce qui exige que le chiffre le plus à gauche de $N$ soit 1 ou 2. Mais $N'$ étant un multiple de $4$, son chiffre des unités ne peut pas être $1.$

Le chiffre des milliers du nombre *N* est donc 2.

Ce multiple de $4$ a donc comme chiffre des unités 2, ce qui limite à $3$ ou $8$ les possibilités pour le chiffre des unités de $N.$ Mais, comme $N\geq 2 000,$ $N'$est nécessairement supérieur à $8 000$ et le chiffre des unités de $N$ ne peut être 3. Le chiffre des unités de *N* est donc 8.

Si on écrit $N=2 000+100b+10c+8$, $b$ et $c$ étant des chiffres, on obtient $N^{'}=8 000+400b+40c+32=8 000+100c+10b+2$, ou encore $390b=60c-30.$ De $13b=2c-1$, on déduit $b=1$ et $c=7. $Le nombre cherché est $2 178$

**4.** L’égalité $N^{'}=5N$ n’est envisageable que si $N<2 000,$ ce qui exige que le chiffre le plus à gauche de $N $soit $1$. Mais alors, le chiffre des unités de $N'$ est aussi $1$, ce qui ne se peut pas pour un multiple de $5.$ Il n’y a donc pas de solution à cette équation.