|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Olympiades de mathématiques de quatrième**

**Concours René Merckhoffer**

**Session 2022**

**Exercice 1**

***Sommes de chiffres***

Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers écrits selon la numération décimale.

Pour cet exercice, on appelle ***poids*** d’un nombre la somme de ses chiffres.

**1.** Quel est le poids du nombre ? Quel est le poids du nombre ?

**2.** Proposer trois nombres différents de même poids .

**3.** Est-il exact de dire que « plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé » ?

**4.** Quel est le plus petit nombre de poids ?

**5.** Quel est le plus petit nombre de poids ?

**6.** Peut-on trouver un nombre ne s’écrivant qu’avec des et des et dont le poids soit

**7.** Peut-on trouver un nombre ne s’écrivant qu’avec des et des 6 et dont le poids soit

**1.** . Les poids demandés sont et

**2.** Les nombres et ont tous pour poids

**3.** Le nombre a deux chiffres, le nombre en a un. L’affirmation est donc fausse.

**4.** Le nombre est le nombre de poids le plus élevé s’écrivant avec cinq chiffres. Son poids est . On doit donc chercher un nombre s’écrivant avec six chiffres, dont un . Le plus petit de tels nombres est

**5.** Le nombre qui s’écrit avec chiffres a pour poids . Comme précédemment, le nombre qui s’écrit avec chiffres précédés d’un est le nombre cherché.

**6.** Les multiples de inférieurs à ont pour chiffre des unités . On leur ajoute un multiple de , dont le chiffre des unités est ou ; la seule possibilité que cette somme ait pour chiffe des unités est Les nombres cherchés s’écrivent avec quatre chiffres et cinq chiffres , comme par exemple

**7.** La somme d’un multiple de et d’un multiple de est un multiple de n’est pas un multiple de La réponse à la question est donc NON.

**Exercice 2**

***Carré inscrit dans un cercle inscrit dans un carré…***

L’unité de longueur est le cm. *Attention : les figures ne sont pas à l’échelle.*

*Tous les résultats numériques demandés sont attendus en valeur exacte.*

Sur la figure ci-contre est représenté le cercle , de centre O et de rayon 2. Les segments [AC] et [BD] sont deux diamètres perpendiculaires de ce cercle.

**1.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

On dit que le cercle est le cercle circonscrit au carré ABCD.

**2.** Quelle est l’aire de la partie grisée de la figure ?

On considère le carré EFGH Dont les côtés sont parallèles à ceux de ABCD et tangents au cercle . On dit que le cercle est inscrit dans le carré EFGH. On considère de même que précédemment le cercle circonscrit au carré EFGH. La figure ci-contre représente cette situation.

**3.** Calculer l’aire de la partie grisée sur cette nouvelle figure.

**4.** Sur le même principe, on peut construire une nouvelle figure avec un cercle circonscrit à un nouveau carré IJKL dont les côtés seraient tangents à et parallèles aux côtés du carré EFGH. Quelle est, sur cette nouvelle figure, l’aire comprise entre le cercle et les côtés du carré IJKL ?

**1.** ABCD possède deux diagonales perpendiculaires se coupant en leur milieu : c’est un losange. Comme ces diagonales ont la même longueur, ABCD est un carré.

**2.** Le triangleAOB est rectangle isocèle, les côtés de l’angle droit ont pour longueur 2. D’après le théorème de Pythagore, on a donc . Cette valeur est aussi l’aire du carré ABCD. L’aire du disque de centre O et de rayon 2 est  . L’aire de la partie grisée est donc ou encore .

**3.** On considère les triangles emboités OAB et OEF. Ces triangles sont isocèles rectangles et si on désigne par M le milieu de [AB] et par N le milieu de [EF), alors comme MA = MB et OA = OB, la droite (ON) est médiatrice de [AB]. De même la droite (OM) est médiatrice de [EF] et les triangles OMA et ONE sont deux triangles emboités, eux-mêmes rectangles et isocèles respectivement en M et N (angle en A comme en E de 45°).

On en déduit que :

* d’après le théorème de Pythagore

 ou encore

Finalement

* d’après le théorème de Thalès, les droites (AM) et (EN) étant parallèles, on a : .

D’où car .

Le côté du carré EFGH a donc pour longueur 4 et le rayon du cercle est .

La même suite de calculs que précédemment nous fournit l’aire du carré EFGH : 16 et celle du disque de bord  : . L’aire de la partie grisée est donc .

**4.** On fait la constatation que l’aire grisée double de la première situation à la seconde. La construction réalisée est la même pour la suite, donc on peut admettre que l’aire double encore pour la troisième figure. Elle est donc .

**Exercice 3**

***Triplets pythagoriciens***

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés .

**1.** Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l’angle droit.

Plus généralement, on s’intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose . On fait l’hypothèse que et on dit que le *triplet*  est *pythagoricien*.

**2. *a.***  Si est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l’angle droit du triangle rectangle associé ?

***b.*** Montrer que est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les « triangles égyptiens ».

***c.*** Montrer que, si le triplet est pythagoricien, alors

**3.** On suppose que le triplet est pythagoricien. On admet alors que les entiers et vérifient l’égalité .

Comparer et et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de et de

**4.**Existe-t-il des entiers et tels que le triplet soit pythagoricien ?

**1.** On calcule *:* et on constate que . La réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle est rectangle en .

**2. *a.*** Comme [BC] est le côté ayant la plus grande longueur, le triangle est rectangle en A

***b.*** On a en effet .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 |  | 5 | 10 | 17 |
| 2 |  |  | 13 | 20 |
| 3 |  |  |  | 25 |

***c.*** Selon l’hypothèse, et sont des nombres entiers inférieurs à 5 et non nuls puisqu’il s’agit des longueurs des côtés d’un triangle. Le tableau ci-contre donne toutes les sommes sous cette hypothèse. On n’obtient que pour et

**3.** Les nombres entiers et ont pour produit . Ils ne sont pas égaux. On a donc , donc et , ce qui conduit au triplet

est un entier non nul inférieur ou égal à . Examinons les valeurs possibles de

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 26 | 29 | 34 | 41 |

Aucun des nombres figurant sur la deuxième ligne n’est un carré parfait. Aucun triplet respectant les hypothèses initiales n’est pythagoricien.

**Exercice 4**

***Angle inconnu***

****L’angle en du triangle mesure 70°. On a placé sur le côté le point et sur le côté le point tels que :

. Les segments et se coupent en .

Quelle est la mesure de l’angle ?

Les angles ET ont la même mesure (triangle isocèle) et cette mesure est la moitié de celle de (angle supplémentaire de l’angle au sommet du triangle isocèle).

De même les angles et ont même mesure, et cette mesure est la moitié de celle de .

Il s’ensuit que la somme des angles et est la moitié de la somme des angles en D et E du triangle CDE.

Cette somme est 110°, et donc la somme des angles et est 55°. Leur supplémentaire, l’angle en F du triangle DEF et l’angle cherché, qui sont opposés par le sommet, ont donc pour mesure 125°.